



جامعة الإسكندرية
ALEXANDRIA
UNIVERSITY
كلية التجارة
FACULTY OF COMMERCE

الأساليب الكمية في مجال الإدارة
المفاهيم والتطبيقات العلمية

دكتور
أشرف سلطان
أستاذ إدارة الأعمال المساعد
كلية التجارة - جامعة الإسكندرية



2019

الفرقة الثالثة

الفصل الدراسي الثاني

بسم الله الرحمن الرحيم

إهـــــــداء

إلى والدي ووالدتي .....
رمزا العطاء المستمر ..... وفاءاً وإجلالاً ....
إلى زوجتي ..... قرة عيني ....
إلي أبنائي الأحباء .... أحمد و محمود

ربي احفظهم جميعاً

مقدمة

لاشك أن نجاح واستمرار المنظمات أياً كان مجال نشاطها (صناعي، زراعي، تجاري، خدمي.....) يتوقف علي مدي سلامة المنطقية المترتبة علي إتباع المنهج العلمي أو الطريقة العلمية لحل المشكلات واتخاذ القرارات.

ومع كبر حجم المشروعات وزيادة رؤوس أموالها وتعدد أقسامها وفروعها، ومن ثم وظائفها، وتنوع المنتجات، وظهور المنافسة وتعدد أطرفها (محلية، وأجنبية)، فقد أصبحت المشاكل التي تواجه تلك المشروعات ذات طبيعة خاصة من ناحية تعدد الأهداف المطلوب تحقيقها وكثرة وتباين المتغيرات الخاصة بكل مشكلة وظهور عدم التأكد، ولهذا أصبحت عملية حل المشكلات واتخاذ القرارات أصعب وأعقد من ذي قبل.

الأمر الذي يقضي بضرورة حدوث تطور نحو استخدام الأساليب الكمية في ترشيد الإدارة عند قيامها بوظائفها المتجسدة في التخطيط ورسم السياسات واتخاذ القرارات والرقابة وتقييم الأداء، مع ضرورة المام المعنين بالعمل الإداري بالأساليب الكمية حتي يتسني لهم الاستفادة منها في معالجة المشاكل الإدارية وحلها من خلال منهج علمي منظم ومتكامل.

ولقد لعب ظهور الحاسبات الآلية وما رافقها من النمو السريع في استخداماتها في المجال الإداري والصناعي دوراً كبيراً في تطوير وإبراز أهمية استخدام الأساليب الكمية والاستفادة منها خاصة في معالجة المشاكل المعقدة والمكلفة اقتصادياً.

ويتناول هذا الكتاب بالدراسة والتحليل أهم الأساليب الكمية الأكثر شيوعاً في مجال الإدارة، حيث سيتم تناول أسلوب البرمجة الخطية، وأسلوب تحليل سلاسل ماركوف، ونظرية القرارات، ونظرية المبارايات، وتحليل نماذج شبكات الأعمال، وأخيراً نظرية صفوف الانتظار.

ويأمـل المؤلـف أن يفيـد هـذا الكتـاب كـل البـاحثين والدارسـين وكـذلك العاملين في مجال الإدارة.

وعلي الله قصد السبيل ،،،،،،،

" رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ"

" صدق الله العظيم "

المؤلف

د. أشرف سلطان

الفصل الأول

ماهية وطبيعة الأساليب الكمية

- مقدمة.
- مفهوم المدخل الكمى والأساليب الكمية.
- الأساليب الكمية وبناء النماذج.
- مراحل مدخل التحليل الكمى.
- الأساليب الكمية المستخدمة فى المجال الإدارى.

ماهية وطبيعة الأساليب الكمية

مقدمة:

ساهم كبر حجم المشروعات وما رافقة من تعدد وتعارض فى الأهداف وكثرة البدائل المصاحبة لاتخاذ القرار الواحد فى جعل إدارة هذه المشروعات عملية معقدة وصعبة.

ويعتبر المدخل الكمى أحد المداخل الحديثة للإدارة المعاصرة، ويطلق على هذا المدخل العديد من المسميات منها الأسلوب المعيارى، أو علم اتخاذ القرار Decision Making Science، أوعلم الإدارة Management Science أو علم بحوث العمليات Operation Research Science.

وتعتمد الأساليب الكمية على استخدام مدخل التحليل الكمى فى عملية اتخاذ القرارات الإدارية، وذلك لمساعدة متخذ القرار فى التوصل إلى أحسن حل ممكن (الحل الأمثل) للمشكلة موضع القرار من خلال التحليل العلمى المنظم للبدائل المتاحة وبيان الأثار المحتملة لها.

مفهوم المدخل الكمى والأساليب الكمية:

يمكن تعريف المدخل الكمى بأنه "أسلوب دراسة أو منهج معين للتحليل والمقارنة يستخدم البيانات والمعلومات الرقمية والأساليب الكمية فى دعم عملية اتخاذ القرار سعياً وراء حل مشكلة ما".

وبناء على ذلك فإن المدخل الكمى فى الإدارة يعتمد فى معالجة وحل المشكلات الإدارية على استخدام النماذج والأساليب الرياضية، حيث يكون من الأفضل فى كثير من الأحيان اللجوء إلى استخدام هذه النماذج والأساليب لاتخاذ القرارات المناسبة لمواجهة وحل المشكلات الإدارية.

وتعتبر الأساليب الكمية حقل واسع يتضمن كافة المداخل الرشيدة Rational Approaches لعملية صنع القرارات الإدارية اعتماداً على استخدام الطريقة العلمية كأساس ومنهج فى البحث والدراسة.

ومن الشروط المهمة التى يستلزم توافرها فى المشكلة التى تجعل استخدام مدخل التحليل الكمى مفيداً فى عملية اتخاذ القرارات ما يلى:

1- يجب أن تكون المشكلة ذات طابع مهم، وعلى هذا الأساس فإن المدير متخذ القرار يرغب فى إجراء تحليل شامل قبل عملية اتخاذ القرار.

2- يجب أن تكون المشكلة ذات طابع معقد، حيث لا يستطيع متخذ القرار تطوير أو تنمية حل جيد لها بدون مساعدة المحلل الكمى.

3- يجب أن تكون المشكلة ذات طابع جديد، حيث لا يتوافر لدى المدير متخذ القرار أى خبرة سابقة يستطيع القياس عليها.

4- يجب أن تكون المشكلة فى أحيان أخرى ذات طابع متكرر، حيث أن الاعتماد على الأساليب الكمية فى حالات اتخاذ القرارات الروتينية والمتكررة ينتج عنه اقتصاد كبير فى جهد ووقت المدير متخذ القرار.

ويعتبر مدخل التحليل الكمى فى كثير من الأحيان هو المدخل الأفضل لمواجهة وحل المشكلات الإدارية، حيث توجد الكثير من الحالات التى يمكن اعتبارها بمثابة مبررات تؤكد على ضرورة استخدام هذا المدخل الكمى فى مواجهة وحل المشكلات الإدارية، **ومن أهم هذه الحالات:**

1- إذا كانت المشكلة موضع البحث والتحليل بالغة فى الصعوبة والتعقيد.

2- إذا كانت بيئة اتخاذ القرار تؤكد على ضرورة الاتجاه نحو تحقيق أهداف كمية محددة.

3- إذا توفر لدى متخذ القرار المعرفة والخبرة والدراية على تطبيق نماذج وأساليب التحليل الكمى.

4- إذا تولد لدى متخذ القرار الشعور بأنه لا يستطيع الوصول إلى حل للمشكلة دون استخدام النماذج والأساليب الكمية.

5- إذا كانت البيانات والمعلومات الخاصة بالمشكلة ذات طبيعة رقمية كمية.

الأساليب الكمية وبناء النماذج:

يتطلب استخدام الأساليب الكمية بناء النماذج، وتعتبر عملية بناء واستخدام النماذج جوهر الأساليب الكمية، خاصة فى حل المشاكل غير الروتينية. ويمكن **تعريف النموذج بأنه" تصوير للواقع بغية توضيح أحد مظاهر الطريقة التى يعمل بها هذا الواقع**".

ويمكن أيضاً **تعريف النموذج على أنه "محاكاة أو تقريب للواقع من خلال علاقات مفترضة وملحوظة**".

وهكذا نجد أن النماذج تعتبر تمثيلاً مبسطاً وتلخيصاً للواقع أى أنها تجريد أو تعبير عن الواقع. وعادة ما يكون النموذج أقل تعقيداً من الواقع، هذا وينبغى أن يكون هذا النموذج كاملاً بدرجة كافية تسمح بتقريب مظاهر الواقع التى تقع تحت الملاحظة والبحث والتحليل.

ويمكن تقسيم النماذج إلى أربعة أنواع وهى:

1- **النماذج المادية أو الطبيعية:** وهى النماذج التى تشبه الشئ الحقيقى وتسلك نفس سلوكة ومن أمثلتها الكرة الأرضية فهى تعد نموذجاً مشابهاً للأرض، وفى الغالب يكون حجم النموذج إما أصغر من الواقع أو أكبر منه، ففى حالة الكرة الأرضية هى أصغر كثيراً من الأرض ولكنها تماثلها فى الشكل وفى أحجام القارات والمحيطات.

2- **النماذج المناظرة أو المماثلة A Nalog Models** : وهى النماذج التى تتكون من أشياء مادية لا توجد فى الواقع، ومن أمثلة ذلك النوع مقاييس درجات الحرارة المختلفة. أى هذه النماذج لا تعبر عن شكل النظام

المطلوب تمثيلة وإنما توضح سلوك ذلك النظام، ومن هذه النماذج الخرائط والرسوم البيانية وخرائط التدفق.

3- **النماذج المعيارية Normative Models:** حيث قد تكون النماذج وصفية تسعى إلى وصف الحقائق والعلاقات مثل نماذج صفوف الانتظار ونماذج المحاكاة، كما قد تكون النماذج معيارية تسعى إلى وصف ما يجب أن يكون مثل البرمجة الخطية.

4- **النماذج الرياضية أو الرمزية Mathematical or Symbolic Models:**

وهى عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات يؤدى حلها إلى تفسير سلوك ظاهرة معينة أو التوقع بالتغييرات الخاصة بها. **ويمكن تصنيف النماذج الرياضية أو الرمزية إلى ثلاثة أنواع وهى:**

أ- النماذج المحددة (المؤكدة) Deterministic Models:

وهى النماذج التى تكون فيها قيم متغيرات النموذج معروفة بشكل مؤكد وثابت بحيث يتم الوصول إلى نفس المخرجات باستخدام مجموعة من المدخلات وذلك مهما تكرر الحل فى النموذج عدة مرات. هذا ويتم تقسيم هذه النماذج إلى قسمين أساسيين كما يلى:

- **النماذج الخطية:** وهى التى تأخذ العلاقة بين متغيراتها موضع الدراسة شكل العلاقة الخطية المستقيمة، ومن أهم الأساليب الكمية المنتمية لهذه النماذج: البرمجة الخطية، وأسلوب النقل، ونموذج التخصيص، وأسلوب البرمجة بالأعداد الصحيحة، وأسلوب برمجة الأهداف، وأسلوب المسار الحرج وأسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت).

- **النماذج غير الخطية:** وهى التى تأخذ العلاقة بين متغيراتها موضع الدراسة شكل العلاقة غير الخطية أى تكون العلاقة من الدرجة الثانية أو من درجة

أعلى من ذلك، ومن أمثلة الأساليب الكمية المنتمية لهذه النماذج: أساليب البرمجة غير الخطية مثل البرمجة الهندسية.

ب- النماذج الاحتمالية Probabilistic Models:

وهى النماذج التى تأخذ فى حسبانها ظروف عدم التأكد، وهى تلك النماذج التى تعطى مجموعات مختلفة من النواتج تكون موزعة توزيعاً احتمالياً مع تكرار حلها، وتتمثل أهم الأساليب الكمية التى تنتمى إلى هذه النماذج: أسلوب البرمجة الاحتمالية، وأسلوب نظرية المبارايات، وأسلوب نظرية القرار، ونماذج صفوف الانتظار.

حـ- النماذج المختلطة:

تجمع هذه النماذج بين النماذج المحددة (المؤكدة) والنماذج الاحتمالية، حيث يتم معالجة بعض نماذج الأساليب الكمية فى بعض الحالات باعتبارها نماذج محددة، كما يتم معالجتها فى حالات أخرى باعتبارها نماذج احتمالية.
وتتمثل أهم هذه الأساليب التى تنتمى إلى هذه النماذج المختلطة فى: أسلوب إدارة المخزون، وأسلوب البرمجة الديناميكية، وأسلوب المحاكاة، وأسلوب بيرت.

مراحل مدخل التحليل الكمى:

يتم استخدام مدخل التحليل الكمى فى معالجة وحل المشكلات الإدارية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

الخطوة الأولي: تحديد المشكلة الإدارية:

وذلك من خلال التعرف على المشكلة وتحليلها بشكل واضح، ويقتضى ذلك ضرورة تحديد الأهداف المراد تحقيقها وكذلك البدائل المتاحة لتحقيقها أمام متخذ القرار، وتحديد المتغيرات التى يمكن التحكم فيها وتلك التى يصعب التحكم فيها، وتحديد القيود المفروضة على الموارد المتاحة.

الخطوة الثانية: بناء أو صياغة النموذج الكمى المراد استخدامه لحل المشكلة: بعد الإنتهاء من الخطوة الأولى تأتى مرحلة تحديد (صياغة) النموذج الكمى الملائم الذى سيستخدم فى حل المشكلة. وفي الغالب سيكون النموذج الرياضى أو الرمزى هو النوع المستخدم لحل المشاكل الإدارية، والذى سيتضمن مجموعة من المعادلات تمثل الهدف والقيود (معبراً عنها بمتباينات يتم تحويلها إلى معادلات) ويتم عرض ذلك فى صورة نموذج رياضى متكامل.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أنه يجب اختيار النموذج الكمى المناسب لطبيعة المشكلة والذى يتلائم مع طبيعة العلاقات الرياضية التى تربط بين كافة متغيرات وثوابت المشكلة المراد حلها وذلك سعياً للوصول إلى الحل الأمثل لها.

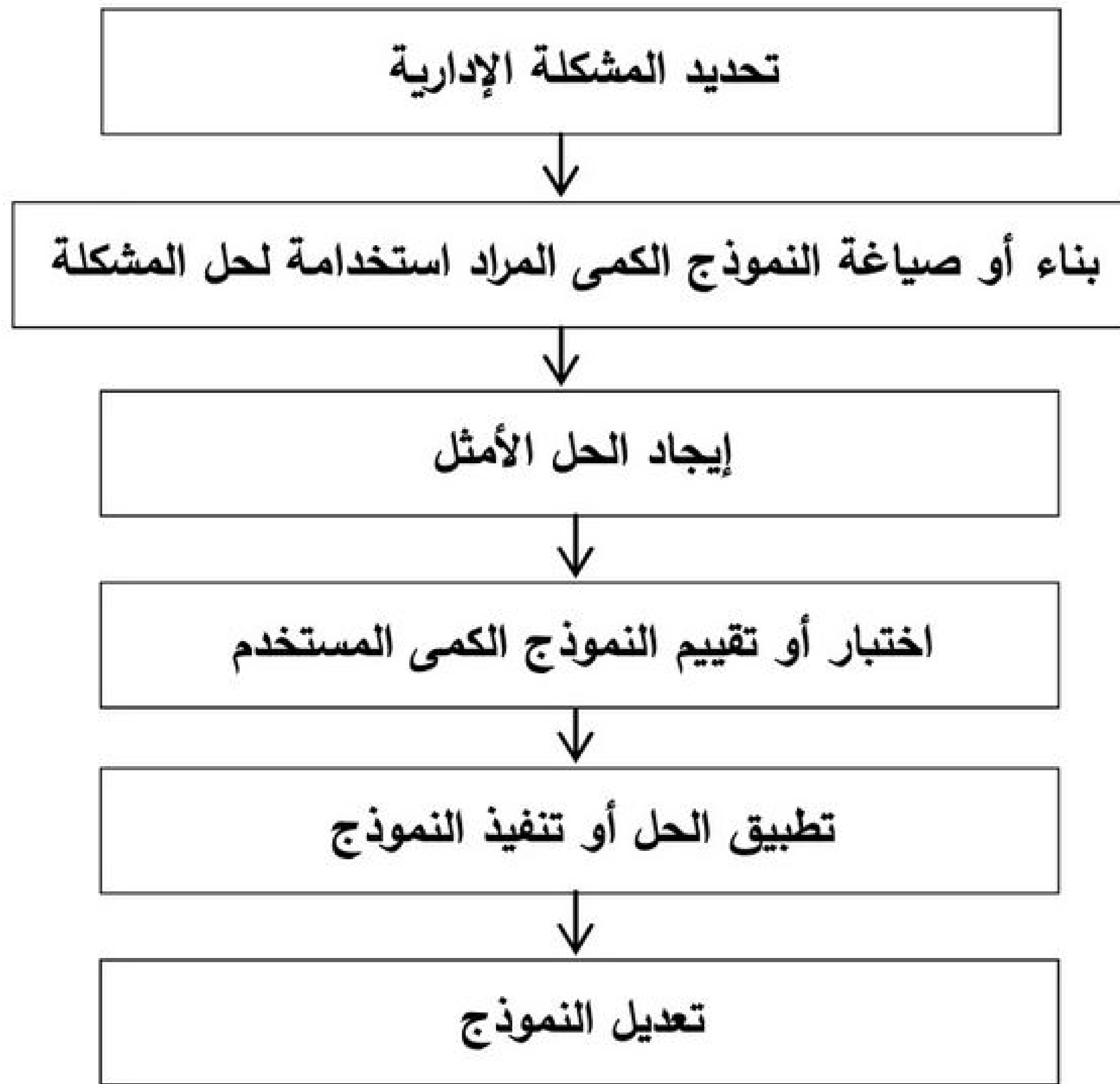
الخطوة الثالثة: إيجاد الحل الأمثل: ويتم التوصل إلى الحل الأمثل من خلال حل النموذج الكمى الذى تم تكوينه، وذلك بهدف التوصل إلى القيم المثلى التى تحقق الأهداف المرغوبة وبأعلى مستوى ممكن. ويجب الأخذ فى الحسبان أن الحل الأمثل سوف يأتي فى ضوء الظروف التى يتطلب هذا النموذج الكمى ضرورة افتراضها، حيث يتم التوصل فى مثل هذه الحالة إلى مخرجات محددة نتيجة لذلك. ومما هو جدير بالذكر أن طرق الحل المستخدمة فى حل النموذج الكمى تختلف باختلاف النماذج المستخدمة.

الخطوة الرابعة: اختبار أو تقييم النموذج الكمى المستخدم: بعد أن يتم تحديد وصياغة النموذج الرياضى لحل مشكلة ما، فإنه من الأمور الهامة التأكد من صلاحية هذا النموذج، ويستخدم فى ذلك عدة طرق منها طريقة الفحص من واقع الماضى وتعتمد تلك الطريقة على استخدام بيانات ماضية أو فعلية خاصة بمشكلة ما وتطبيق النموذج فى حل هذه المشكلة ومقارنة نتائج الحل بالنتائج الفعلية المعروفة من قبل. وتهدف هذه الخطوة إلى تحديد ما إذا كانت الأرقام

التى نتجت من الحل باستخدام النموذج الرياضى واقعية ومقبولة من قبل الإدارة أم لا، وإلا سوف يصبح الحل الذى تم التوصل إليه ليس له جدوى.

الخطوة الخامسة: تطبيق الحل أو تنفيذ النموذج: إذا ثبت صحة وواقعية الذى تم التوصل إليه باستخدام النموذج الكمى المستخدم، وتبين أن هذا الحل قابل للتطبيق، وبالتالى أصبح مقبولاً تماماً من الإدارة، فإن الأمر يتطلب ضرورة العمل على تطبيق هذا الحل للاستفادة منه فى علاج وحل المشكلة الإدارية موضع الدراسة والبحث والتحليل. ويتم تنفيذ النموذج من خلال عرض نتائج الحل فى صورة تعليمات واضحة وتوصيلها إلى المسئولين لتنفيذها، وهذا الأمر يقتضى ضرورة وجود تعاون وقنوات اتصال بين خبراء الأساليب الكمية والقائمين بالتنفيذ.

الخطوة السادسة: تعديل النموذج: تم بناء النموذج الكمى وتحديد نوعه فى ظل ظروف معينة وبناء على فروض محددة وطالما ظل المناخ الذى صمم النموذج فى ظله سائداً كلما ظل النموذج صالحاً للاستخدام، وفى حالة حدوث أى تغيير فى فروض اعداد النموذج أو بيئة ومناخ العمل فإن الأمر يقتضى ضرورة تعديل النموذج ليتمشى مع الفروض والمتغيرات الجديدة.
ويوضح الشكل التالى رقم (1−1) مراحل مدخل التحليل الكمى:



شكل رقم (1-1): مراحل مدخل التحليل الكمى

وتجدر الإشارة فى هذا الصدد إلى أن هناك عدة أمور يجب مراعاتها عند بناء النموذج الكمى سواء كان ذلك فى مرحلة صياغة النموذج أو فى مرحلة الحصول على النتائج وتنفيذ النموذج.

ففى مرحلة صياغة النموذج الكمى يجب:

1- اختيار النموذج الكمى المناسب للمشكلة محور الدراسة.

2- عدم المبالغة فى التجريد أو التمثيل مع مراعاة العناصر الرئيسية للنظام أو المشكلة محور الدراسة والعناصر غير الرئيسية.

3- يجب مراعاة الدقة عند إعداد البيانات اللازمة لتشغيل النموذج.

4- ضرورة مراعاة الدقة عند إعداد المعادلات وحلها.

أما فى مرحلة الحصول على نتائج النموذج الكمى وتنفيذه فيجب:

1- اختبار صلاحية النموذج قبل تنفيذه.

2- ضرورة تفسير نتائج النموذج فى ضوء الهدف أو الأهداف التى من أجلها تم بناء واستخدام ذلك النموذج.

3- ضرورة مراعاة وأخذ خبرة ورأى متخذ القرار وعدم تجاهل ذلك الأمر مهما بلغت دقة النموذج وإمكانياته.

الأساليب الكمية المستخدمة فى المجال الإدارى:

يعتمد استخدام الأساليب الكمية فى المجال الإدارى فى القيام بدورها وتحقيق أهدافها على مجموعة من الأساليب أو النماذج مثل:

1- البرمجة الخطية: وتستخدم فى حل مشاكل تخصيص الموارد النادرة، ويتكون النموذج الرياضى للبرمجة الخطية من دالة هدف، ومجموعة من القيود، بالإضافة إلى شرط عدم السالبية وذلك بهدف تعظيم الربح أو تدنية التكاليف. ويتم تطبيق هذا النموذج للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة محور الدراسة، ويشترط لتطبيق نموذج البرمجة الخطية أن تكون العلاقات خطية بين متغيرات الدراسة، وضرورة تحقيق هدف واحد، وتوفر عدة بدائل لحل المشكلة، وضرورة وجود قيود ثابتة، وندرة الموارد، وأخيراً إمكانية القياس الكمى للمتغيرات المستخدمة.

2- نماذج تحليل شبكات الأعمال: وهى من النماذج التى تستخدم لحل كثير من المشاكل التى تواجه المشروعات أياً كانت طبيعة نشاطها مثل مشكلة تحديد الحد الأدنى للوقت المتوقع لإتمام المشروع، ومشكلة تخطيط وتقييم ومراجعة البرامج ويستخدم فى ذلك أسلوب بيرت Pert، وتتمثل نماذج تحليل شبكات الأعمال فى أسلوب المسار الحرج CPM وبيرت Pert وتستخدم فى جدولة ومتابعة تنفيذ المشروعات وتحليل العلاقة بين وقت وتكاليف تنفيذ

المشروعات وتحديد كيفية تخفيض وقت إتمام المشروع وتخفيض تكاليف تنفيذ المشروع إلى الحد الأدنى.

3- **تحليل سلاسل ماركوف:** هى إحدى أساليب بحوث العمليات التى تبحث فى تحليل التغيرات الحالية لمتغير عشوائى وذلك بهدف التنبؤ بالتغيرات المستقبلية لهذا المتغير. وعند استخدام تحليل سلاسل ماركوف يجب أولاً معرفة الحالة الحالية وهى أخر حدث تم فى الفترة السابقة مباشرة، وثانياً معرفة التحركات الاحتمالية والتى هى عبارة عن احتمالات التحرك أو التغير بين الحالات الممكنة.

4- **نظرية المباريات:** هى عبارة عن تكتيك يستخدم عند الرغبة فى اتخاذ القرارات التى تتطلب أخذ إستراتيجيات الأطراف الأخرى ذوى المصالح المتعارضة فى الاعتبار. أى أن نظرية المباريات ماهى إلا أداة من الأدوات الرياضية التى تساهم بشكل كفء وفعال فى حل المشكلات أو المواقف التى تتميز بالصراع والتى تواجه متخذى القرارات وذلك عند قيامهم بالبحث عن الإستراتيجيات المثلى سواء أكانت استراتيجيات الخصم معروفة لديهم أو غير معروفة.

5- **نظرية القرار:** وتهتم نظرية القرار بصفة أساسية ببيان كيفية مساعدة متخذ القرار فى صنع واتخاذ القرارات فى ظل بيئة معينة، بحيث تمكنه من تحليل مجموعة من المواقف والتى تشتمل على العديد من النواتج والبدائل المختلفة، كما تقدم أيضاً لمتخذ القرار الأساليب الرشيدة التى تساعده على الاختيار السليم للبديل المناسب خلال عملية اتخاذ القرار. وفى ضوء ذلك يمكن القول أن نظرية القرار تستخدم لتحديد الإستراتيجية المثلى عندما يواجه متخذ القرار عدة بدائل يمكن استخدامها لحل مشكلة ما، وخاصة إذا كانت عملية اتخاذ القرار تتم فى بيئة الخطر أو عدم التأكد.

6- نظرية صفوف الانتظار: وتهدف نظرية صفوف الانتظار إلى تخفيض الوقت للعملاء طالبى الخدمة، وأيضاً لوحدات أداء الخدمة، وتجنب ضياع الوقت فى مراكز العمل. وتظهر مشكلة الانتظار لعدم توافق معدل أداء الخدمة مع معدل وصول العملاء. فإذا كان معدل وصول العملاء سريعاً بدرجة أكبر من معدل أداء الخدمة للعميل الواحد فإن ذلك يترتب عليه ضرورة انتظار العملاء وتعطيلهم مما يمكن أن يؤثر سلبياً فى نتائج أعمالهم وفى استمرار تعاملهم مع المنظمة. ومن أمثلة صفوف الانتظار التى نراها فى حياتنا السيارات أمام محطات البنزين، وعملاء البنك أمام منافذ صرف الشيكات.

7- أسلوب المحاكاة: هو أسلوب لدراسة وتعلم نظام حقيقى عن طريق إخضاعه للتجربة بنموذج أخر يمثل هذا النظام ويتضمن التعبيرات الرياضية والعلاقات المنطقية التى تصف كيفية حساب قيمة مخرجات هذا النظام بمعلومية قيم المدخلات الخاصة به والتى تتضمن نوعين أساسين يتمثل إحداهما فى المدخلات التى يمكن التحكم فيها، بينما يتمثل النوع الثانى فى المدخلات الأخرى الإحتمالية. ويعتمد أسلوب المحاكاة بصفة أساسية على فكرة محاكاة أو تقليد نظام ما يصبح موضعاً للدراسة والتحليل وذلك عن طريق تحديد صورة طبق الأصل لهذا النظام توضح أدائه وتبين التفاعلات المختلفة التى تجرى بين عناصرة دون المساس بالنظام نفسه.

8- برمجة الأهداف: وتستخدم لحل المشكلة التى تتسم بتعدد وتعارض الأهداف وعدم تجانس وحدات قياس كل هدف ويهدف هذا الأسلوب إلى تخفيض الانحرافات غير المرغوبة إلى أدنى حد ممكن، كما أنه يصل إلى أفضل حل مرض، ويتم تحديد أولويات بين الأهداف المطلوب تحقيقها.

9- البرمجة الديناميكية: وتستخدم فى حل المشاكل متعددة المراحل حيث يكون لكل قرار فى مرحلة معينة أثر على المرحلة التالية، كما أنها تستخدم فى حالة ما إذا كانت العلاقات بين المتغيرات غير خطية.

الفصل الثانى

البرمجة الخطية / الطريقة البيانية

Linear Programming – Graphical Method

- مقدمة.
- تعريف البرمجة الخطية.
- الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية.
- تكوين نموذج البرمجة الخطية.
- الحل البيانى لمشكلة البرمجة الخطية:
  - أولاً: استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تعظيم الربح.
  - ثانياً: استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تدنية التكاليف.
- تمارين للتدريب.

البرمجة الخطية/ الطريقة البيانية

مقدمة:

طورت البرمجة الخطية خلال الحرب العالمية الثانية وتم استخدامها أنذاك فى معالجة مشاكل التخطيط فى السلاح الجوى الأمريكى، وفيما بعد أخذت طريقها فى المجالات المختلفة وأصبحت أداة مهمة لمساعدة المديرين فى عملية اتخاذ القرارات.

فمن المعلوم أن أى منظمة تزاول نشاطها وتحقق أهدافها من خلال استخدام مجموعة من الموارد المتاحة لديها، وعادة ما تواجة المنظمة مشكلة أساسية وهى ندرة الموارد المتاحة، وتتضح تلك المشكلة نتيجة عدم كفاية الكميات المتاحة من الموارد لتحقيق الأهداف المطلوبة أو الاستخدامات البديلة، وهنا تظهر مشكلة كيفية الوصول إلى الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة. ولمعالجة هذه المشكلة بطريقة علمية وسليمة، فإن المنظمة تستخدم نموذج البرمجة الخطية Linear Programming وهو أسلوب رياضى يساعد فى التغلب على أو مواجهة مشكلة تخصيص الموارد والوصول إلى الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة المحدودة، بحيث يتم تحقيق أكبر أرباح ممكنة أو تحمل أقل تكاليف ممكنة.

ويستخدم نموذج البرمجة الخطية فى حل مشاكل التوزيع الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات المختلفة. ويعد أسلوب البرمجة الخطية من أكثر الأساليب الكمية انتشاراً سواء فى الدراسات الأكاديمية أو الممارسات العملية. وقد ثبت استخدام أسلوب البرمجة الخطية فى معالجة غالبية المشاكل التى يتعرض لها مدير الانتاج والعمليات، ومن أمثلة هذه المشاكل:

- عمل خطة توزيع مثلى يتم فيها تحديد الكميات من المنتج النهائى أو الكميات من المادة الخام الواجب نقلها من المصادر المختلفة إلى جهات

الاستخدام المتعددة وهو ما يعرف بمشاكل النقل وذلك لتدنية تكاليف النقل وتحقيق أعلى كفاءة توزيعية ممكنة.

- مشكلة تحديد تشكيلة المنتجات، وجدولة الانتاج، وتخطيط المخزون السلعى لمقابلة الطلب المتوقع مستقبلاً.
- مشكلة توزيع الموارد الإنتاجية (المادة الخام، الآلات، العمالة ... الخ) على منتجات مختلفة بهدف تحديد التوليفة المثلى من المنتجات التى تحدد الكمية الواجب انتاجها من كل منتج.
- مشكلة اختيار أفضل طريقة لتخطيط الاستثمارات وتحديد نوع الاستثمار المناسب من بين البدائل الاستثمارية المتاحة بحيث يكون عائد الاستثمار أعلى ما يمكن.
- مشكلة تخصيص الآلات لمهام معينة أو تخصيص العمال مختلفى المهارة والكفاءة على الاقسام أو الآلات المتاحة بحيث يتحقق أقصى كفاءة فى الاستخدام وأعلى أرباح ممكنة.

تعريف البرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها " أسلوب رياضى يتعلق بالتخصيص الأمثل للموارد النادرة ".

وتعرف أيضاً بأنها " أسلوب رياضى يعتمد عليه لمعالجة المشاكل الادارية وذلك للمساعدة فى اتخاذ القرارات الاقتصادية لتحقيق أقصى مستوى من العوائد أو الوصول بالتكاليف إلى أدنى مستوى ممكن".

كما عرفت المنظمة العربية للعلوم الادارية البرمجة الخطية بأنها " طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التى تحد من القدرة على تحقيقه فى صورة معادلات أو متباينات خطية".

وتجدر الاشارة إلى أن لفظ البرمجة يشير إلى أن هذا الأسلوب يمكن من وضع برنامج عمل يحدد أنواع الأنشطة اللازم القيام بها وتوقيتها وكمياتها بأسلوب يتميز بفكرة الحلول المتتابعة، بمعنى أن هذا الأسلوب يصل إلى الحل الأمثل على خطوات متتابعة. أما لفظ الخطية فيشير إلى وجود علاقة خطية بين النواتج وبين الموارد المتاحة.

وهناك شروط معينة يستلزم توافرها فى المشكلة التى يمكن حلها بواسطة البرمجة الخطية، وهذه الشروط هى:

1- وجود هدف معين يراد تحقيقة: لكل منظمة صناعية هدف تسعى إلى تحقيقة، حيث يسمى الهدف بمعيار الأفضلية، فهو الأساس الذى يتم بموجبه توزيع الموارد المحدودة على استخداماتها المتعددة، أى أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقه فى شكل تعظيم الربح لأقصى حد ممكن، أو تدنية التكاليف لأقل حد ممكن.

2- ضرورة توافر مجموعة من القيود على بعض أو كل الموارد المتاحة تفيد الإدارة فى الوصول لأهدافها سواء تدنية للتكاليف أو تعظيم للربح.

3- ضرورة توافر أكثر من بديل لحل المشكلة وأن تكون هذه البدائل متناسبة مع الموارد المتاحة وأن يتم الاختيار من هذه البدائل البديل الذى يحقق الهدف المطلوب.

4- ضرورة وجود علاقات كمية بين متغيرات المشكلة وتوضح تلك العلاقات فرض الخطية.

5- لابد من التعبير عن عناصر المشكلة (الهدف والقيود) فى شكل معادلات أو متباينات خطية.

كذلك يجب مراعاة أن التكاليف المطلوب تخفيضها هى التكاليف المتغيرة، حيث أن نصيب الوحدة منها ثابت الأمر الذى يساهم فى تحقيق شرط الخطية.

الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية:

يعتمد نموذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفروض الأساسية وهى:

1- **فرض التأكد التام:** وفقاً لهذا الفرض تكون إدارة المنظمة على علم تام وتأكد تام فيما يتعلق بكافة البيانات المتعلقة بدالة الهدف والقيود الموجودة على تحقيقه.

2- **فرض الخطية:** يقضى هذا الفرض بأن العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقات خطية.

3- **فرض عدم السالبية:** فى ضوء هذا الفرض فإنه يجب أن تكون كافة القيم المرتبطة بالحلول النهائية إما صفرية أو موجبه أى لا تكون هناك قيم سالبة.

4- **فرض القابلية للتجزئة أو التقسيم:** ويقضى هذا الفرض بأن الحلول الممكنة أمام الشركة ليس من الضرورى أن تكون أرقام صحيحة فقط ولكن يمكن أن تكون أرقام كسرية أو صحيحة أو كليهما.

5- **فرض ثبات هامش مساهمة الوحدة:** أى أن هامش مساهمة الوحدة ثابت، ولتحقيق هذا الفرض يستلزم ثبات سعر بيع الوحدة بغض النظر عن حجم الإنتاج.

تكوين نموذج البرمجة الخطية:

يمكن تعريف عملية بناء نموذج للبرمجة الخطية بأنه ترجمة لمشكلة توجد فى الواقع فى شكل مجموعة من المعادلات الرياضية.

فمن أجل تكوين نموذج البرمجة الخطية، فإن الأمر يتطلب إعادة صياغة البيانات الموجودة والتى تعبر عن المشكلة فى شكل علاقات رياضية حتى يمكن لنا أن نستخدم الأسلوب الرياضى لمعالجتها، **ويمكن صياغة أى مشكلة فى شكل نموذج البرمجة الخطية من خلال عدة خطوات وهى:**

1- تحديد اتجاه دالة الهدف Objective Function ، هل هى تعظيم ربح أم تدنية تكاليف؟

2- تحديد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها ووضع رموز افتراضية لها.

3- صياغة دالة الهدف: لها حالتين هما:

أ- حالة تعظيم الربح:

إجمالى الربح (ر) = (ربح الوحدة من السلعة الأولى × عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى) + (ربح الوحدة من السلعة الثانية × عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية) + (ربح الوحدة من السلعة (ن) × عد الوحدات المنتجة من السلعة (ن)].

ب- حالة تدنية التكاليف:

إجمالى التكلفة (ت) = (تكلفة الوحدة من السلعة الأولى × عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى) + (تكلفة الوحدة من السلعة الثانية × عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية) + (تكلفة الوحدة من السلعة (ن) × عدد الوحدات المنتجة من السلعة (ن)].

4- صياغة القيود المفروضة على دالة الهدف وتحديد اتجاه المتباينات، حيث يأخذ اتجاه المتباينات ثلاث اتجاهات وهى:

أ- إذا نص فى المشكلة على وجود حد أقصى أو رقم معين متاح للمورد المستخدم (عدد ساعات العمل، طاقة الآلات... الخ) يكون اتجاه المتباينه أقل من أو يساوي (≥).

ب- إذا نص فى المشكلة على أنه يتم استخدام الموارد المتاح بالكامل لإنتاج المنتجات المراد إنتاجها يكون اتجاه المتباينة علامة(=).

ج- إذا نص فى المشكلة على وجود حد أدنى أو على الأقل رقم معين من المورد المستخدم يكون اتجاه المتباينه أكبر من أو يساوي (≤).

5- صياغة قيود عدم السالبية: وهى تعنى أن كمية الإنتاج من السلعة الأولى والسلعة الثانية ... الخ لابد أن يكون أكبر من أو تساوي صفر (≤) صفر.

ملاحظات هامة عند تكوين أو صياغة أى مشكلة فى شكل نموذج للبرمجة الخطية:

1- يجب أن تكون الوحدة المستخدمة للقياس فى نفس القيد ثابتة وهى ذاتها المستخدمة فى الطرف الأيسر من المتباينة.

2- ليس من الضرورى أن تكون وحدة القياس المستخدمة لكل القيود ثابتة، فمثلاً يمكن استخدام ساعات العمل فى القيد الأول، وكمية الخشب فى القيد الثانى ...... وهكذا.

3- استخدام نفس الوحدة الزمنية فى كل القيود، فمثلاً يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الأولى عن عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً، نفس الشئ يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الثانية عن كمية الأخشاب المتاحة فى الأسبوع ايضاً.

4- ليس من الضرورى أن تمثل كل من السلعتين فى القيد، فقط يكون القيد خاصاً بسلعه واحده فقط.

مثال (1):

تقوم شركه "الهدي" بتصنيع سلعتين هما: السلعة (أ)، والسلعة (ب) كل سلعة منهما لابد وأن تمر على ثلاث آلات وهى الآلة (س) ثم الآلة (ص) ثم الآلة (ع). ويحتاج تصنيع الوحدة من السلعة (أ) إلى (4) دقائق على الآلة (س)، و(3) دقائق على الآلة (ص)، و(5) دقائق على الآلة (ع). ويحتاج تصنيع الوحده من السلعة (ب) إلى (3) دقائق على الآلة (س)، و(4) دقائق على الآلة (ع). فإذا علمت أن الطاقة القصوى لكل آلة من الآلات الثلاث هى (100) ساعة أسبوعياً، والحد الأقصى للمبيعات من السلعة (أ) هو (2000)

وحدة أسبوعياً، أما الحد الاقصى للمبيعات من السلعة (ب) هو (1500) وحدة أسبوعياً. وكان ربح الوحدة من السلعة (أ) = 9 جنيه، وربح الوحدة من السلعة (ب) = 8 جنيه.

المطلوب: تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل سلعة بشكل يضمن تعظيم إجمالى الربح المحقق إلى أقصى حد ممكن .

الحــل

* قبل أن نتعرض لخطوات صياغة مشكلة البرمجة الخطية، يمكن لنا أن نلخص بيانات المشكلة السابقة فى شكل جدول كما يلى:

الآلة / السلعة	س	ص	ع	الحد الأقصى للمبيعات	ربح الوحدة
أ	4	3	5	2000	9
ب	3	-	4	1500	8
الطاقة القصوى (ساعات)	100	100	100		

1- تحديد اتجاه دالة الهدف: تعظيم الربح (ر) .

2- تحديد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها:

نفترض أن:

$س_1$ = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (أ).

$س_2$ = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (ب).

3- صياغة دالة الهدف:

إجمالى الربح (ر) = (ربح الوحدة من السلعة (أ) × عدد الوحدات المنتجة من السلعة (أ) + (ربح الوحدة من السلعه (ب) × عدد الوحدات المنتجة من السلعة (ب)] .

∴ تصبح دالة الهدف هى: تعظيم (ر) = 9 $س_1$ + 8 $س_2$.

وبذلك يكون حل المشكلة هو معرفة قيمة $س_1$ ، $س_2$ التى تجعل قيمه (ر) أقصى ما يمكن.

4- صياغة القيود: نجد فى هذه المشكلة نوعان من القيود، قيود خاصة بالطاقة القصوى المتاحة للآلات، وقيود خاصة بالحد الأقصى المتاح للمبيعات.

- بالنسبة لقيود الآلات:

قيد الآلة (س): نجد أن الطاقة القصوى المتاحة للآلة (س) = 100 ساعة/ أسبوعياً بمعنى أن الزمن الذى سيستغرق فى تصنيع وحدات السلعة (أ) ووحدات السلعة (ب) يجب ألا يتجاوز 100 ساعة/ أسبوعياً .

∴ زمن تصنيع وحدات السلعة (أ) =

زمن تصنيع الوحدة من السلعة (أ) × عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (أ) = 4 × $س_1$

∴ زمن تصنيع وحدات السلعة (ب) =

زمن تصنيع الوحدة من السلعة (ب) × عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (ب) = 3 × $س_2$

∴ زمن تصنيع وحدات السلعة (أ) + زمن تصنيع وحدات السلعة (ب) يجب الا يتجاوز 100 ساعة/ أسبوعياً.

أى أن: 4 $س_1$ + 3 $س_2$ يجب أن تقل عن أو تساوى (100) ساعة/ أسبوعياً

∴ قيد الآلة س: 4 $س_1$ + 3 $س_2$ $\leq$ 100 ساعة / أسبوعياً.

وبنفس الطريقة نحدد قيد الآلة (ص)، وقيد الآلة (ع) كما يلي:

قيد الآلة (ص): 3 $س_1$ $\leq$ 100 ساعة / أسبوعياً .

قيد الآلة (ع): 5 $س_1$ + 4 $س_2$ $\leq$ 100 ساعة / أسبوعياً .

- بالنسبة لقيود المبيعات:

لما كان الحد الأقصى للمبيعات من السلعة (أ) = 2000 وحدة أسبوعياً

∴ الكمية التى سيتم إنتاجها من السلعه (أ) يجب ألا تزيد عن 2000 وحدة أسبوعياً

∴ $س_1 \leq 2000$ وحدة / أسبوعياً .

– لما كان الحد الأقصى للمبيعات من السلعة (ب) = 1500 وحدة أسبوعياً

∴ $س_2 \leq 1500$ وحدة / أسبوعياً

– **قيود عدم السالبية:**

لما كانت كميات الإنتاج من السلعة (أ)، والسلعة (ب) لا يمكن أن تكون قيم سالبة، وعلى ذلك فإن: $س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر

وهذا يمكن تصوير النموذج الرياضى للمشكلة فى شكل نموذج البرمجة الخطية كما يلى:

دالة الهدف: تعظيم (ر) = 9 $س_1$ + 8 $س_2$

فى ظل أن:

$$4 س_1 + 3 س_2 \leq 100$$

$$3 س_1 \leq 100$$

$$5 س_1 + 4 س_2 \leq 100$$

$$س_1 \leq 2000$$

$$س_2 \leq 1500$$

$$س_1 ، س_2 \geq \text{صفر}$$

مثال (2):

ترغب إحدى الشركات فى اختيار استراتيجية لنشاطها الإعلانى والتى تهدف إلى توصيل الرسالة الإعلانية إلى أكبر عدد من العملاء. وأمام الشركة أن تعلن فى التليفزيون أو المجلات. ويتكلف الإعلان الواحد فى التليفزيون 10000 جنيه ويمكن الوصول بالإعلان إلى 5000 فرد، أما الإعلان الواحد فى المجلات فهو يتكلف 6000 جنيه فقط ويصل الإعلان بها إلى حوالى

4500 فرد. وتحتاج الشركة إلى استخدام (6) إعلانات على الأقل فى التليفزيون، وألا يزيد عدد الإعلانات فى المجلات عن (12) إعلاناً. فإذا كان حجم ميزانية الإعلان فى الشركة لهذا العام هو 90000 جنيه. فما هو عدد الإعلانات الأمثل فى كل وسيلة؟ قم بصياغة المشكلة فى صورة نموذج للبرمجة الخطية.

الحـل

أولاً: صياغة المشكلة فى صورة نموذج للبرمجة الخطية:

من الواضح أن الشركة ترمى إلى زيادة عدد المشاهدين أو القارئين للإعلان إلى أقصى درجة. وتستخدم الشركة وسيلتين إعلانيتين وهما التليفزيون والمجلات. ومن هنا فإن الهدف الخاص بنموذج البرمجة الخطية الذى يعكس موقف هذه الشركة هو تعظيم عدد المشاهدين فى كلا الوسيلتين.

نفترض أن:

$س_1$ = عدد الاعلانات فى التليفزيون.

$س_2$ = عدد الاعلانات فى المجلات.

وبناءاً عليه فإن دالة الهدف تصبح كالتالى:

تعظيم $5000 س_1 + 4500 س_2$

وتعنى تعظيم عدد المشاهدين لكل إعلانات الشركة.

أما مجموعة القيود فهى كما يلى:

* قيد التكلفة وحجم الميزانية المتاحة:

$$10000 س_1 + 6000 س_2 \leq 90000$$

* قيد عدد الإعلانات فى التليفزيون:

$$س_1 \geq 6$$

* قيد عدد الإعلانات فى المجلات :

$$س_2 \leq 12$$

* قيد عدم السالبية: $س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر

وبذلك يصبح النموذج الرياضى للمشكلة فى شكل نموذج البرمجة الخطية كما يلى:

عظم 5000 $س_1$ + 4500 $س_2$

فى ظل أن:

10000 $س_1$ + 6000 $س_2 \leq 90000$

$س_1 \leq 6$

$س_2 \geq 12$

$س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر

مثال (3):

تقوم إحدى الشركات بإنتاج منتجين، وهما المنتج (س)، والمنتج (ص). ويمر المنتج (س) بعمليتين صناعيتين، بينما يمر المنتج (ص) بثلاث عمليات صناعية. ويبلغ عدد الساعات المخصصة للمنتجين فى العملية الأولى (54) ساعة/ عمل، وفى العملية الثانية (64) ساعة/ عمل. أما العملية الصناعية الثالثة فقد خصص فيها (16) ساعة / عمل لإنتاج المنتج (ص) فقط. فإذا علمت أن الشركة تربح (20) جنيه من كل وحدة من المنتج (س) كما تربح (50) جنيه من كل وحدة من المنتج (ص). كذلك يستغرق إنتاج الوحدة من المنتج (س) ساعة واحدة فى العملية الصناعية الأولى، و(4) ساعات فى العملية الصناعية الثانية. أما المنتج (ص) فتستغرق الوحدة منه (3) ساعات فى العملية الصناعية الأولى، وساعة واحدة فى كل من العملية الصناعية الثانية والثالثة.

المطلوب: صياغة المشكلة فى صورة نموذج برمجة خطية.

الحـل

نفترض أن:

$س_1$ = عدد الوحدات المنتجة من المنتج (س).

$س_2$ = عدد الوحدات المنتجة من المنتج (ص).

دالة الهدف: تعظيم (ر) = 20 $س_1$ + 50 $س_2$

فى ظل القيود:

* قيد عدد الساعات المتاحة فى العملية الصناعية الأولى:

$س_1$ + 3 $س_2$ ≤ 54

* قيد عدد الساعات المتاحة فى العملية الصناعية الثانية:

4 $س_1$ + $س_2$ ≤ 64

* قيد عدد الساعات المتاحة فى العملية الصناعية الثالثة:

$س_2$ ≤ 16

* قيد عدم السالبية: $س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

وبذلك يصبح النموذج الرياضى للمشكلة فى شكل نموذج للبرمجة الخطية كما يلى:

عظم : 20 $س_1$ + 50 $س_2$

فى ظل أن:

$س_1$ + 3 $س_2$ ≤ 54

4 $س_1$ + $س_2$ ≤ 64

$س_2$ ≤ 16

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

مثال (4):

تقوم شركة "ريماس" بإنتاج أحد المنتجات والذى يستخدم فى إنتاجه نوعان من المواد الأولية وهما المادة (س) بتكلفة مقدارها (4) جنيهات للوحدة ، والمادة (ص) تتكلف الوحدة منها (16) جنيه. وإذا فرض أن وزن المنتج النهائى لابد وأن يكون (300) رطل، وأنه لابد من استخدام (28) وحده من المادة الأولية

(ص) على الأقل، كما ينبغى أن يزيد الحجم المستخدم من المادة الأولية (س) عن (40) وحدة. فإذا علمت أن كل وحدة من المادة (س) تزن (10) أرطال، وكل وحده من المادة (ص) تزن (20) رطل. فما هى كمية المواد الأولية التى ينبغى استخدامها فى إنتاج المنتج النهائى الخاص بتلك الشركة بحيث تتحقق أقل تكلفة ممكنة فى إنتاجه؟

الحـل

نفترض أن:

$س_1$ = الكمية المستخدمة من المادة الأولية (س).

$س_2$ = الكمية المستخدمة من المادة الأولية (ص).

دالة الهدف: تدنية (ت): = 4 $س_1$ + 16 $س_2$

فى ظل القيود:

* قيد وزن المنتج النهائى:

10 $س_1$ + 20 $س_2$ = 300

* قيد المستخدم من المادة (س):

$س_1$ ≥ 40

* قيد المستخدم من المادة (ص):

$س_2$ ≤ 28

* قيد عدم السالبية: $س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

وبذلك يصبح النموذج الرياضى للمشكلة فى شكل نموذج للبرمجة الخطية كما يلى:

تدنية (ت) = 4 $س_1$ + 16 $س_2$

فى ظل أن:

10 $س_1$ + 20 $س_2$ = 300

$س_1$ ≥ 40

$س_2 \leq 28$

$س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر

مثال (5):

تقوم شركة "أحمد محمود" للمواد الغذائية بإنتاج بعض العصائر ويشترط فى كل من هذه العصائر ألا تزيد نسبه اللون عن (2%)، ونسبة المادة الحافظة عن (5%)، ونسبه السكر عن (12%) . وتستخدم الشركة عدة مواد لتصنيع العصائر وهى (أ)، (ب)، (جـ) والتى تختلف تكلفتها بالطن. وتحاول الشركة اختيار التوليفة التى تحقق لها أقل تكلفة إنتاج ممكنة مع مراعاة الشروط الصحية المطلوبة فى العصير، فإذا كانت المعلومات المتاحة عن المواد المستخدمة فى إنتاج العصير كما يلى:

المواد المستخدمة فى التصنيع	أ	ب	جـ
نسبة السكر	%10	%15	%8
نسبه اللون	%3	%2	%1
نسبه المادة الحافظة	%6	%4	%2
التكلفة لكل طن	3200	2800	4000

المطلوب: صياغة المشكلة فى صورة نموذج برمجة خطية.

الحـــل

نفترض أن:

$س_1$ = الكمية المستخدمة من المادة (أ).

$س_2$ = الكمية المستخدمة من المادة (ب).

$س_3$ = الكمية المستخدمة من لمادة (جـ).

دالة الهدف:

تدنية (ت)= 3200 $س_1$ + 2800 $س_2$ + 4000 $س_3$

فى ظل القيود:

(1) قيد نسبة السكر:

$$\frac{0.10\ س_1 + 0.15\ س_2 + 0.08\ س_3}{س_1 + س_2 + س_3} \leq 0.12$$

$$= -\ 0.2\ س_1 + 0.03\ س_2 - 0.04\ س_3 \leq صفر$$

(2) قيد نسبة اللون:

$$\frac{0.03\ س_1 + 0.02\ س_2 + 0.01\ س_3}{س_1 + س_2 + س_3} \leq 0.02$$

$$= 0.01\ س_1 - 0.01\ س_3 \leq صفر$$

(3) قيد نسبة المادة الحافظة:

$$\frac{0.06\ س_1 + 0.04\ س_2 + 0.02\ س_3}{س_1 + س_2 + س_3} \leq 0.05$$

$$= 0.01\ س_1 - 0.01\ س_2 - 0.03\ س_3 \leq صفر$$

(4) قيد عدم السالبية:

$$س_1 ،\ س_2 ،\ س_3 \geq صفر$$

وبذلك يصبح النموذج الرياضى للمشكلة فى شكل نموذج للبرمجة الخطية كما يلى:

تدنية (ت) = $3200\ س_1 + 2800\ س_2 + 4000\ س_3$

فى ظل أن:

$$-\ 0.02\ س_1 + 0.03\ س_2 - 0.04\ س_3 \leq صفر$$

$$0.01\ س_1 - 0.01\ س_3 \leq صفر$$

0.01 س$_1$ − 0.01 س$_2$ − 0.03 س$_3$ ≥ صفر

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ≤ صفر

الحل البيانى لمشكلة البرمجة الخطية:

يستخدم أسلوب الحل البيانى فى حل مشكلة البرمجة الخطية عندما لا يزيد عدد المتغيرات على اثنين ويعود ذلك إلى الاستحالة العملية لرسم أكثر من محاور لتصوير المشكلة بيانياً، وفى حالة زيادة عدد المتغيرات عن اثنين يتم استخدام أسلوب السمبلكس Simplex لحل المشاكل فى هذه الحالة. وفيما يلى نفرض لكيفية الحل البيانى لمشكلة البرمجة الخطية فى حالة تعظيم الربح وفى حالة تدينة التكاليف:

أولاً: استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تعظيم الربح:

تمر عملية حل مشكلة البرمجة الخطية البسيطة حلاً بيانياً بعدد من الخطوات وهى:

1- صياغة المشكلة فى شكل نموذج رياضى.

2- تحويل المتباينات إلى معادلات رياضية وبافتراض المساواة وبدون اضافة متغير إضافى.

3- قم برسم محورين احدهما رأسى والأخر أفقى ولنسمى المحور الأفقى (س$_1$)، والمحور الرأسى (س$_2$).

4- خذ القيود الموجودة فى المشكلة وقم بحل معادلاتها لتحديد قيمة (س$_1$) القصوى، وقيمة (س$_2$) القصوى بافتراض أن الطاقة المتاحة سوف تخصص بالكامل لإنتاج منتج واحد فقط منها.

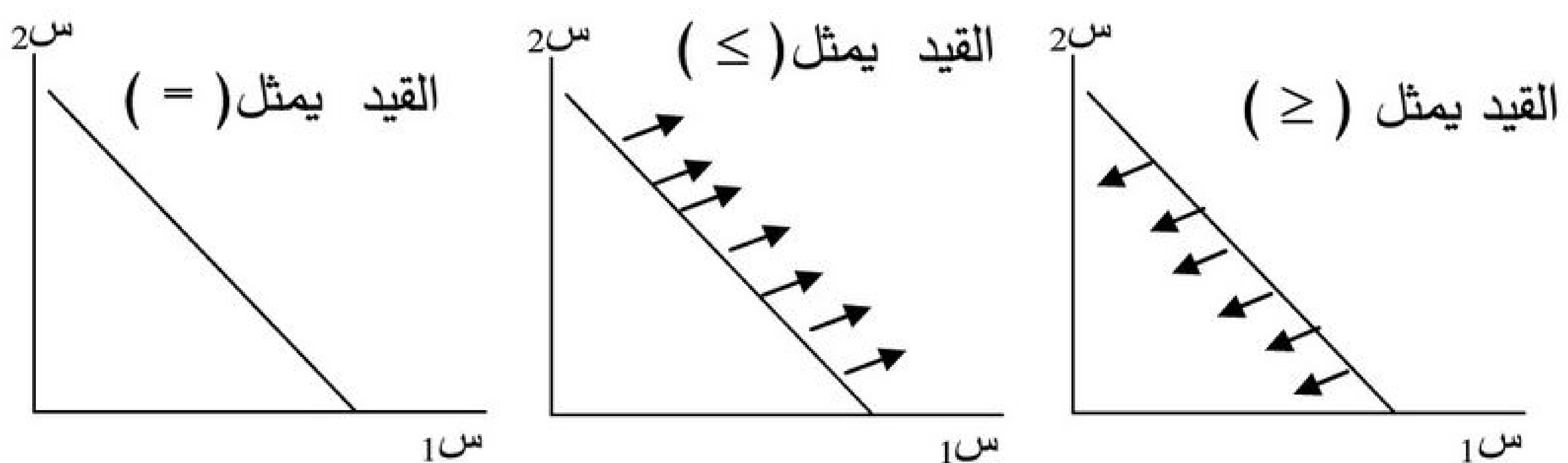
5- قم برسم خط يربط بين قيمتي الإنتاج ككل من س$_1$ ، س$_2$ والذى يمثل القيد الأول، وقم بعمل نفس الشئ للقيد الثانى ... وهكذا.

6- تحديد منطقة الحلول الممكنة: لتحديد منطقة الحلول الممكنة فإن ذلك يتوقف على اتجاه المتباينة كما يلى:

أ- إذا كان القيد يمثل أقل من أو يساوى (≥) فإن الحل الممكن ينبغى أن يكون إما علي الخط الذي يمثل القيد أو أسفله حيث ينبغي أن يكون الحل أسفل الخط للتعبير عن حالة " أقل من ".

ب- إذا كان القيد يمثل أكبر من أو يساوى (≤) فإن الحل الممكن ينبغى أن يكون إما علي الخط الذي يمثل القيد أو أي نقطة أعلى هذا الخط للتعبير عن حالة " أكبر من".

جـ- إذا كان القيد يمثل حالة تساوى (=) فإن الحل الممكن ينبغى أن يكون على الخط نفسه. ويتضح ذلك كما يلى:



شكل رقم (2-1) : تحديد منطقة الحلول الممكنة.

7- ايجاد الحل الأمثل: ويتم ذلك عن طريق:

أ- تقييم الربح عند النقاط الركنية.

ب- رسم دالة الهدف بيانياً.

مثال (6):

قم بحل المشكلة التالية بيانياً:

تعظيم (ر) = 20 $س_1$ + 10 $س_2$

فى ظل القيود:

2 س$_1$ + 4 س$_2$ ≤ 320

4 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ 400

س$_1$ ، س$_2$ ≤ صفر

الحـل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات:

المتباينة ← المعادلة

2 س$_1$ + 4 س$_2$ ≤ 320 ← 2 س$_1$ + 4 س$_2$ = 320

4 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ 400 ← 4 س$_1$ + 2 س$_2$ = 400

2- إيجاد قيمة س$_1$ ، س$_2$ فى كل معادلة:

لايجاد قيمة (س$_1$) نفترض أن (س$_2$) = صفر، ولايجاد قيمة (س$_2$) نفترض أن (س$_1$) = صفر

*** رسم القيد الأول:**

* افترض أن س$_1$ = صفر

من المعادلة 2 س$_1$ + 4 س$_2$ = 320

يكون 4 س$_2$ = 320 ومنها س$_2$ = 80

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الرأسى (حيث س$_1$ = صفر) هى (صفر ، 80) .

* افترض أن س$_2$ = صفر من المعادلة 2 س$_1$ + 4 س$_2$ = 320

يكون 2 س$_1$ = 320 ومنها س$_1$ = 160

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الأفقى (حيث س$_2$ = صفر) هى (160 ، صفر).

وبالتالي يتم رسم خط القيد الأول (المعادلة الأولي) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 80)، (160 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذى يمثل القيد الأول وبالرجوع إلى الصيغة التى كان عليها القيد الأول نجد وجود إشارة (≥) وهى تعنى أن أى نقطة على الخط أو أسفل الخط تحقق هذا القيد.

* **رسم القيد الثانى:**

نفترض أن $س_1$ = صفر من المعادلة 4 $س_1$ + 2 $س_2$ = 400

يكون 2 $س_2$ = 400 ومنها س = 200

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الرأسى (حيث $س_1$ = صفر) هى (صفر ، 200).

* افترض أن $س_2$ = صفر

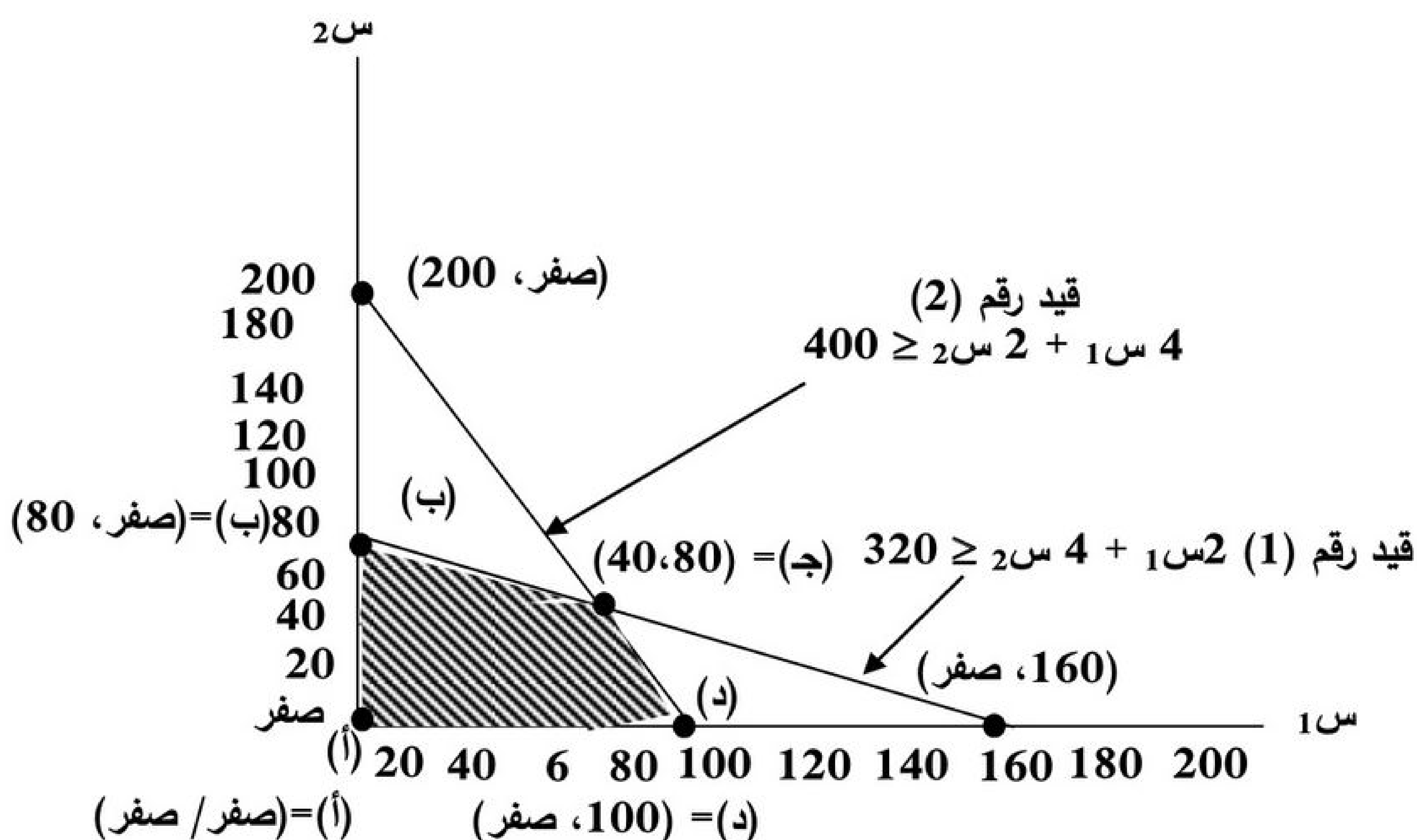
من المعادلة 4 $س_1$ + 2 $س_2$ = 400

يكون 4 $س_1$ = 400 ومنها $س_1$ = 100

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الأفقى (حيث $س_2$ = صفر) هى (100 ، صفر).

وبالتالي يتم رسم خط القيد الثاني (المعادلة الثانية) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 200)، (100 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذى يمثل القيد الثانى، وبالرجوع إلى الصيغة التى كان عليها القيد الثانى نجد وجود إشارة (≥) وهى تعنى أن أى نقطة على الخط أو أسفل الخط تحقق هذا القيد ومن أجل تحديد نقاط الحل التى تحقق القيدين فى وقت واحد، نقوم برسم الشكل التالى:



(3) ايجاد الحل الأمثل:

ويتم فى هذه الخطوة اختيار الحل الأمثل وذلك من بين كل الحلول الممكنة لمشكلة البرمجة الخطية وهو الحل الذى يعظم (أو يقلل) من قيمة دالة الهدف. ويمكن القيام بهذه الخطوة فى ظل الطريقة البيانية وذلك عن طريق تقييم النقط الركنية كما يلى:

طالما أن القيود الموجودة فى المشكلة هى قيود خطية ودالة الهدف دالة خطية وللمشكلة حلاً أمثل فإن قواعد الرسم تقتضى أن يقع هذا الحل فى واحدة على الأقل من النقط الركنية وهى: (أ ، ب، جـ ، د)

حيث النقطة (أ) = (صفر، صفر)، والنقطة (ب) = (صفر ، 80) ، والنقطة (د) = (100 ، صفر).

وللوصول إلى النقطة (جـ) يتم ذلك عن طريق حل المعادلتين التاليتين معاً:

$$2 س_1 + 4 س_2 = 320 \leftarrow (1)$$

$$4 س_1 + 2 س_2 = 400 \leftarrow (2)$$

بضرب المعادلة رقم (1) × 2 ، وضرب المعادلة رقم (2) × −1

نحصل على الاتى:

$4 س_1 + 8 س_2 = 640 \leftarrow (3)$

$-4 س_1 - 2 س_2 = -400 \leftarrow (4)$

بجمع المعادلتين (3)، (4) نحصل على:

$6 س_2 = 240$ ومنها $س_2 = 40$

بالتعويض عن قيمة $س_2 = 40$ فى المعادلة رقم (1) نحصل على:

$2 س_1 + (4 \times 40) = 320$

$2 س_1 = 320 - 160$ ومنها $2 س_1 = 160$

$س_1 = 80$

ويعنى ذلك أن النقطة الرابعة (حـ) = (80، 40)

ويمكن تقدير الربح لكل النقط الركنية (أ ، ب ، جـ ، د)

وذلك بالتعويض عن قيمة $س_1$ ، $س_2$ فى دالة الهدف واختيار أعلى ربح فى حالة تعظيم الربح. أما فى حالة تدنية التكاليف فتكون النقطة التى تحقق أقل تكلفة هى النقطة المثلى.

ويمكن الآن تقدير الأرباح المتوقعة عند النقاط الركنية الأربعة حسب دالة الهدف كما فى الجدول التالى:

النقاط الركنية	المزيج الإنتاجى		مقدار الأرباح حسب دالة الهدف (ر) = 20 $س_1$ + 10 $س_2$
	$س_1$	$س_2$	
(أ)	صفر	صفر	20 × صفر + 10 × صفر = صفر جنيه
(ب)	صفر	80	20 × صفر + 10 × 80 = 800 جنيه
(جـ)	80	40	20 × 80 + 10 × 40 = 2000 جنيه
(د)	100	صفر	20 × 100 + 10 × صفر = 2000 جنيه

يتضح من الجدول السابق أن الحل الأمثل يقع عند النقطة (جـ) حيث المزيج الانتاجى (س$_1$ = 80، س$_2$ = 40)،

وربح هذا المزيج الإنتاجى الأمثل = 2000 جنيه.

وأيضا يقع الحل الأمثل عند النقطة (د) حيث المزيج الإنتاجى (س$_1$ = 100، س$_2$ = صفر) وربح المزيج الإنتاجى الأمثل = 2000 جنيه.

ثانياً: استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تدنية التكاليف:

يتشابه استخدام الطريقة البيانية فى حل مشكلة تدنية التكاليف مع استخدامها فى حل مشكلة تعظيم الربح التى أوضحناها فى المثال السابق. والفارق الوحيد سوف يكون فى خطوة اختيار الحل الأمثل. ودعنا الآن ننتقل لتوضيح كيفية استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تدنية التكاليف.

مثال (7):

فى ضوء البيانات التالية استخدم الطريقة البيانية فى تحديد تشكيلة المنتجات التى تخفض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

دالة التكاليف تدنية (ت) = 8 س$_1$ + 4 س$_2$

فى ظل القيود:

6 س$_1$ + 6 س$_2$ ≥ 36

6 س$_1$ + 2 س$_2$ ≥ 24

س$_1$ ، س$_2$ صفر

الحــل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات، ويتحقق ذلك بافتراض استغلال كل الموارد المتوافرة استغلالاً كاملاً

المتباينة ← المعادلة

6 س$_1$ + 6 س$_2$ ≥ 36 ← 6 س$_1$ + 6 س$_2$ = 36

6 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ 24 ← 6 س$_1$ + 2 س$_2$ = 24

2- إيجاد قيمة س$_1$ ، س$_2$ فى كل معادلة:

***رسم القيد الأول:** المعادلة الأولى: 6 س$_1$ + 6 س$_2$ = 36

بفرض أن س$_1$ = صفر من المعادلة 6 س$_1$ + 6 س$_2$ = 36

∴ 6 س$_2$ = 36

∴ س$_2$ = 6

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الرأسى (حيث س$_1$= صفر) هى (صفر، 6)

بفرض أن س$_2$ = صفر من المعادلة 6 س$_1$ + 6 س$_2$ = 36

∴ 6 س$_1$ = 36

∴ س$_1$ = 6

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الأفقى (حيث س$_2$ = صفر) هى (6 ، صفر).

وبالتالي يتم رسم خط القيد الأول (المعادلة الأولي) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 6)، (6 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذى يمثل القيد الأول، وبالرجوع إلى الصيغة التى كان عليها القيد الأول نجد وجود إشارة (≤) وهى تعني أن أى نقطة على الخط أو أعلى الخط تحقق هذا القيد.

***رسم القيد الثانى:** المعادلة الثانية: 6 س$_2$ + 2 س$_2$ = 24

عند س$_1$ = صفر سوف تصبح س$_2$ = 12 ← النقطة (صفر، 12)

عند س$_2$ = صفر سوف تصبح س$_1$ = 4 ← النقطة (4 ، صفر)

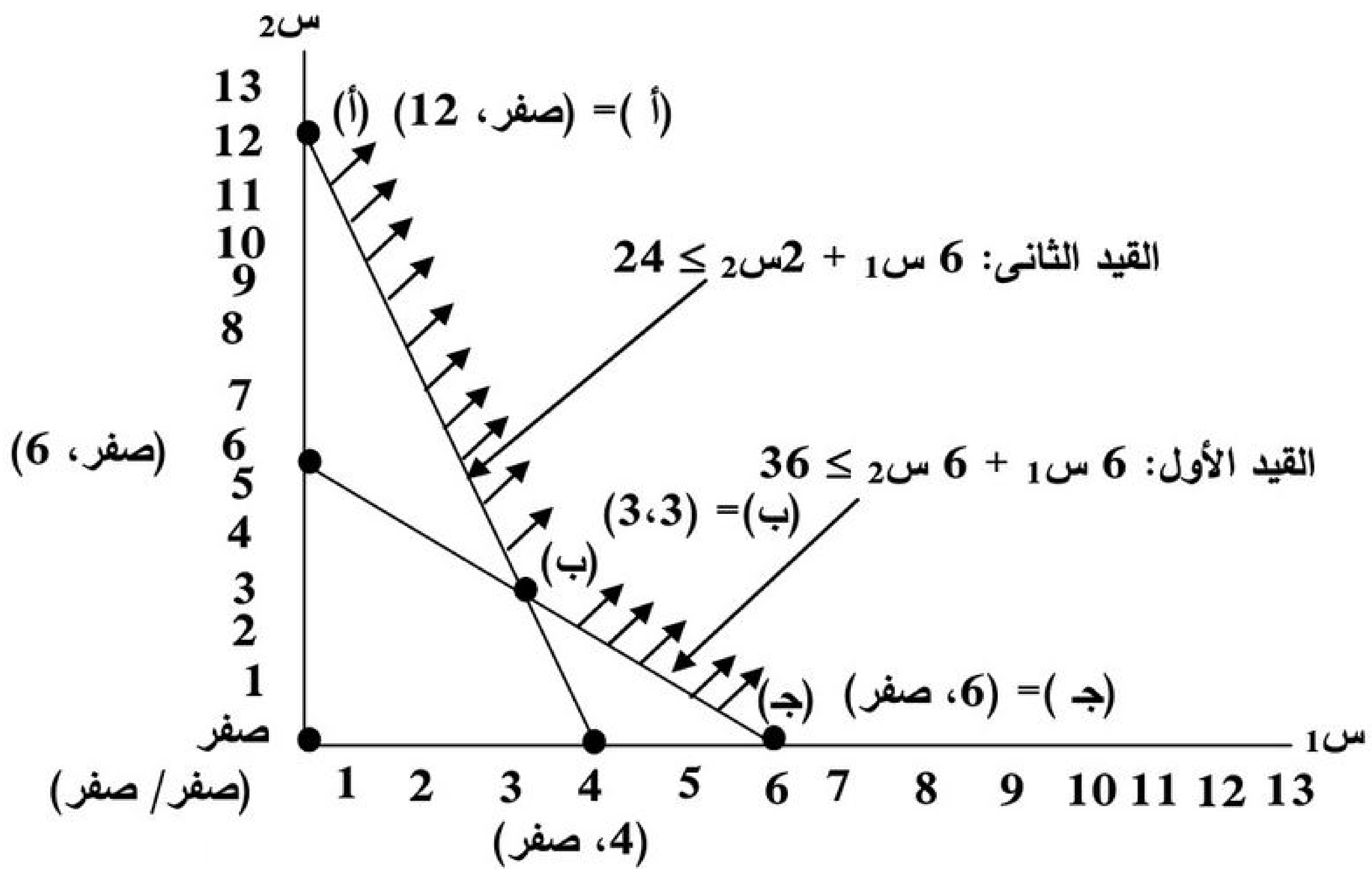
ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الرأسى (حيث س$_1$ = صفر) هى (صفر ، 12).

كما أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الأفقى (حيث $س_2$ = صفر) هى (4 ، صفر).

وبالتالي يتم رسم خط القيد الثاني (المعادلة الثانية) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 12)، (4 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذى يمثل القيد الثانى، وبالرجوع إلى الصيغة التى كان عليها القيد الثانى نجد إشارة ($\geq$) وهى تعنى أن أى نقطة على الخط أو أعلى الخط تحقق هذا القيد.

ومن أجل تحديد نقاط الحل التى تحقق القيدين فى وقت واحد نقوم برسم النقاط السابقة على الشكل التالى:



3- ايجاد الحل الأمثل:

يلاحظ من الشكل السابق أن القيدين قد التقيا فى النقطة (ب)، وطالما أن القيود الموجودة فى المشكلة هى قيود خطية ودالة الهدف خطية وللمشكلة حلاً

أمثل فإن قواعد الرسم تقتضى أن يقع هذا الحل فى واحدة على الأقل من النقط الركنية وهى: (أ ، ب ، جـ).

حيث النقطة (أ) = (صفر ، 12) ، والنقطة (جـ) = (6، صفر)

وللوصول إلى النقطة (ب) يتم ذلك عن طريق حل المعادلتين معاً كما يلى:

$$6 \text{ س}_1 + 6 \text{ س}_2 = 36 \quad \leftarrow \quad (1)$$

$$6 \text{ س}_2 + 2 \text{ س}_2 = 24 \quad \leftarrow \quad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) تكون النتيجة

4 س$_2$ $= 12$ ومنها س$_2$ $= 3$

وبالتعويض بقيمة س$_2$ $= 3$ فى المعادلة (1) نجد أن

$$6 \text{ س}_1 + (6 \times 3) = 36$$

ومنها 6 س$_1$ $= 18$ ومنها س$_1$ $= 3$

ويعنى ذلك أن النقطة الثالثة (ب) = (3 ، 3) .

ويمكن الآن تقدير التكاليف المتوقعة عند النقاط الركنية أ ، ب، جـ حسب دالة الهدف كما فى الجدول التالى:

النقاط الركنية	المزيج الإنتاجى		مقدار التكاليف حسب دالة الهدف
	س$_1$	س$_2$	(ت) = 8 س$_1$ + 4 س$_2$
(أ)	صفر	12	8 × صفر + 4 × 12 = 48 جنيه
(ب)	3	3	8 × 3 + 4 × 3 = 36 جنيه
(جـ)	6	صفر	8 × 6 + 4 × صفر = 48 جنيه

يتضح من الجدول السابق أن الحل الأمثل الذى يخفض التكاليف إلى أدنى حد لها يقع عند النقطة (ب) حيث المزيج الإنتاجى (س$_1$ = 3 ، س$_2$ = 3)، وتكلفة المزيج الإنتاجى الأمثل = 36 جنيه.

تمارين علي الفصل الثاني

تمرين (1): تقوم شركة الأثاثات المعدنية بإنتاج ثلاث أنواع من المكاتب الحديثة صغيرة الحجم، متوسطة، مكاتب للآلات الكاتبة. وكانت هذه الشركة توظف 200 عامل ماهر، 150 عامل نصف ماهر وكانت عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً 40 ساعة. وكانت كل وحدة من المكاتب المنتجة تحتاج إلي النوعين من العمالة كالآتي:

منتجات / عمالة	مكاتب		
	صغيرة	متوسطة	للآلة الكاتبة
ماهرة	5	3	8
نصف ماهرة	5	7	11

فإذا علمت أن مساهمة كل وحدة من المكاتب المنتجة صغيرة، متوسطة والمكاتب المخصصة للآلة الكاتبة هي 5، 2، 6 جنيهات على التوالي :

المطلوب : صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

تمرين (2): يقوم مزارع بخلط ثلاث أنواع من مزيج العلف لإطعام ماشيته.

بحيث بلغت تكلفة طعام التغذية (أ) 20 قرش للكيلو.

بحيث بلغت تكلفة طعام التغذية (ب) 40 قرش للكيلو.

بحيث بلغت تكلفة طعام التغذية (جـ) 50 قرش للكيلو.

وقد كانت هناك متطلبات معينة في صورة عناصر يتكون منها المزيج الكلي لكي يمكنه تحقيق القيمة الغذائية المرغوب فيها، ويتضمن كل مزيج كميات متباينة من العناصر المطلوبة (بروتين . كالسيوم . فيتامين).

كما يظهر في الجدول التالي حيث يوضح الحد الأدنى من المتطلبات وعدد وحدات كل عنصر في كل كيلو من مزيج العلف ويهدف المزارع إلي تقديم الكمية المناسبة من العلف بأدنى تكلفة ممكنة.

منتجات / متطلبات العناصر الغذائية	مواد			الحد الأدنى المطلوب أسبوعيا
	أ	ب	جـ	
بروتين (ب)	2	3	1	5
كالسيوم (ك)	1	2	1	2
فيتامين (ف)	2	2	3	3

وكان الحد الأقصى للتغذية في الأسبوع 10 كيلو.

المطلوب: تقديم الكمية المناسبة من العلف للماشية بحيث تكون التكلفة عند حدها الأدنى.

تمرين (3): إذ كانت إحدي الشركات تقوم بإنتاج إحدي المنتجات والذي يستخدم في إنتاجه نوعان من المواد (أ ، ب) بتكلفة قدرها 2، 8 للوحدة علي التوالي .

وكان وزن المنتج النهائي لابد أن يكون 150 رطل ، ولابد من استخدام 14 وحدة علي الأقل من المادة (ب) ، ولا ينبغي أن يزيد الحجم المستخدم من المادة الأولية (أ) عن 20 وحدة. فإذا علمت أن كل وحدة من المادة (أ) تزن 5 أرطال ، وكل وحدة من المادة (ب) تزن 10 أرطال .

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

تمرين (4): تقوم شركة مصر للبترول بإنتاج ثلاثة أنواع من البنزين وهم : الممتاز 92، والسوبر 90، والعادي 80. ويتطلب كل صنف ثلاثة مكونات وهي: البنزين الخام ، والأوكتين، ومواد كيماوية معينة حيث يتوافر منها أسبوعياً علي التوالي 32000، 24000، 11000 جالون لدي الشركة.

ويتطلب إنتاج الجالون من البنزين الممتاز 0.22 جالون من البنزين الخام ،

0.5 جالون من الأوكتين، 0.28 جالون من المواد الكيماوية. أما البنزين السوبر فيحتاج إلي 0.55 جالون من البنزين الخام ، 0.32، جالون من الأوكتين، 0.13 جالون من المواد الكيماوية. أما البنزين العادي فيحتاج إلي 0.72 جالون من البنزين الخام ، 0.2 جالون من الأوكتين، 0.08 جالون من المواد الكيماوية. فإذا علمت أن ربح الجالون من البنزين الممتاز والسوبر والعادي هو 0.048، 0.40، 0.029 علي التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة (غير مطلوب حل النموذج).

تمرين(5): ترغب إحدي الشركات التي تعمل في مجال المطاعم الإعلان عن الوجبات التي تقدمها للعملاء. وقد توافرت لديها مجموعة من الوسائل الترويجية وهي : الإعلان بالتليفزيون، والإعلان بالجرائد، والإعلان بالإذاعة بالفترة الصباحية، والإعلان بالإذاعة بالفترة المسائية. وقد أمكن جمع بيانات عن عدد الأفراد الذين يمكن أن يصل إليهم الإعلان من خلال الوسيلة الإعلانية ، وكذلك تكلفة الإعلان في كل وسيلة، والحد الأقصي المسموح به لعدد الإعلانات عبر كل وسيلة في الأسبوع:

الوسيلة الإعلانية	عدد المشاهدين	تكلفة الإعلان الواحد بالجنيه	الحد الأقصي المسموح به لعدد الإعلانات أسبوعياً
التليفزيون	5000	800	12
الجرائد	8500	925	5
الإذاعة بالفترة الصباحية	2400	290	25
الإذاعة بالفترة المسائية	2800	280	20

وتلتزم الشركة بناء علي تعاقدات مسبقة بألا يقل مجموع الإعلانات المقدمة من خلال الإذاعة بنوعيها عن (5) إعلانات أسبوعياً. ومن ناحية آخري تصر الإدارة علي عدم إنفاق أكثر من 1800 جنيهاً علي الإعلان الأسبوعي بالإذاعة بنوعيها.

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية بما يضمن تعظيم عدد المشاهدين للإعلانات. علماً بأن المبلغ الإجمالي المخصص للإعلان هو 8000 جنيه (غير مطلوب حل النموذج).

تمرين(6): تفكر شركة هوندا اليابانية في إنتاج 3 أنواع جديدة من الدراجات البخارية وهي : C 90، C 250، C 700. وتستخدم الشركة 3 أنواع من المواد الخام وهي (أ، ب، ج) ولكن هناك مشكلة ندرة في تلك المواد فالكميات المطلوب توريدها منها يومياً هي : 400، 200، 300 طن علي التوالي، مع ملاحظة أن المادة (أ) يجب أن تستخدم بالكامل في نفس يوم توريدها للمصنع لأسباب فنية، أما المادتين (ب، ج) فيجب أن تشتري تلك المواد كحد أقصي

حيث أنه إذا تبقي منها أي كمية لليوم التالي فهذا يتطلب ظروف تخزينية معينة ومكلفة. وفيما يلي بيانات الأرباح وعدد الأطنان المستخدمة من كل مادة:

نوع الدراجة	ربح الدراجة	المادة (أ)	المادة (ب)	المادة (ج)
C 90	140 دولار	2 طن	1 طن	1 طن
C 250	300 دولار	8 طن	1 طن	---
C 700	400 دولار	2 طن	4 طن	1 طن

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية بما يضمن تعظيم أرباح الشركة.

تمرين(7): تقوم شركة " ريماس" بإنتاج أجهزة التليفزيون ، والفيديو. وكانت مساهمة الأرباح لها 2، 3 علي التوالي ، ويحاول مدير الإنتاج تحديد المزيج الأمثل لتعظيم الربح ، وتوافر للمدير المعلومات التالية:

يمكن للشركة تجميع 10 أجهزة تليفزيون في اليوم كحد أقصي، كما يمكن للشركة تجميع 12 جهاز فيديو في اليوم كحد أقصي.

يمكن استخدام العمالة بطاقة قصوي في اليوم وفي تلك الحالة يمكن للشركة تجميع 15جهاز تليفزيون في اليوم أو تجميع 15جهاز فيديو.

الطاقة المتاحة لقسم التشطيب 18جهاز تليفزيون أو 18جهاز فيديو.

تبين من الدراسات أن طاقة قسم التخزين 12جهاز تليفزيون أو 24 جهاز فيديو.

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية بما يضمن تعظيم أرباح الشركة.

تمرين (8): تفكر إحدي شركات إنتاج المواد الغذائية في إنتاج نوعان من المكرونة. وقد أوضحت الدراسات أن الوحدة من النوع الأول تحتاج إلي 0.3 كيلو دقيق، أما الوحدة من النوع الثاني فتحتاج إلي 0.2 كيلو دقيق أيضاً. وقد كان تشغيل الوحدة من النوع الأول في قسم الإنتاج يحتاج 0.1 ساعة عمل، بينما تحتاج الوحدة من النوع الثاني 0.15 ساعة عمل. فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة أسبوعياً هي 100 كيلو، وأن ساعات العمل المتاحة أسبوعياً هي 35 ساعة. كما أن ظروف السوق أوضحت أن الإنتاج من النوع الأول يجب أن يكون علي الأقل معادلاً 70% من إجمالي الإنتاج من النوعين. فإذا كان ربح الوحدة من النوع الأول 0.1 جنيه ، وربح الوحدة من النوع الثاني 0.25 جنيه.

المطلوب : صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

تمرين (9): تفكر شركة " أحمد محمود" للمواد الغذائية في إنتاج نوعان من المكرونة . وقد أوضحت الدراسات أن الوحدة من النوع الأول تحتاج إلي 0.2 كيلو دقيق، أما الوحدة من النوع الثاني فتحتاج إلي 0.3 كيلو دقيق أيضاً. وقد كان تشغيل الوحدة من النوع الأول في قسم الإنتاج يحتاج 0.15 ساعة عمل ، بينما تحتاج الوحدة من النوع الثاني 0.1 ساعة عمل. وقد أوضحت الدراسات كذلك أنه يمكن استخدام علي الأقل 200 كيلو من الدقيق أسبوعياً ، وأن ساعات العمل المتاحة أسبوعياً هي 70 ساعة. كما أن ظروف السوق أوضحت أن الإنتاج من النوع الثاني يجب أن يكون معادلاً كحد أقصي 65% من إجمالي الإنتاج من النوعين. فإذا كان ربح الوحدة من النوع الأول 0.25 جنيه ، وربح الوحدة من النوع الثاني 0.1 جنيه.

المطلوب : صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

تمرين (10): ترغب إحدي الشركات التي تعمل في مجال المطاعم الإعلان عن الوجبات التي تقدمها للعملاء. وقد توافرت لديها مجموعة من الوسائل الترويجية وهي : الإعلان بالإذاعة بالفترة الصباحية، والإعلان بالإذاعة بالفترة المسائية، والإعلان بالتليفزيون، والإعلان بالجرائد . وقد أمكن جمع بيانات عن عدد الأفراد الذين يمكن أن يصل إليهم الإعلان من خلال الوسيلة الإعلانية ، وكذلك تكلفة الإعلان في كل وسيلة، والحد الأقصي المسموح به لعدد الإعلانات عبر كل وسيلة في الأسبوع:

الوسيلة الإعلانية	عدد المشاهدين	تكلفة الإعلان الواحد بالجنيه	الحد الأقصي المسموح به لعدد الإعلانات أسبوعياً
الإذاعة بالفترة الصباحية	4800	580	50
الإذاعة بالفترة المسائية	5600	560	40
التليفزيون	10000	1600	24
الجرائد	17000	1850	10

وتلتزم الشركة بناء علي تعاقدات مسبقة بألا يقل مجموع الإعلانات المقدمة من خلال الإذاعة بنوعيها عن (10) إعلانات أسبوعياً. ومن ناحية آخري تصر الإدارة علي عدم إنفاق أكثر من (3600) جنيهاً علي الإعلان الأسبوعي بالإذاعة بنوعيها.

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية بما يضمن تعظيم عدد المشاهدين للإعلانات. علماً بأن المبلغ الإجمالي المخصص للإعلان هو (16000) جنيه (غير مطلوب حل النموذج).

تمرين (11): تمتلك إحدى الشركات آلتين لتصنيع منتجين، وتبلغ الطاقة الانتاجية للآلة الأولى (40) ساعة، بينما تبلغ الطاقة الانتاجية الخاصة بالآلة الثانية (32) ساعة يومياً . فإذا كانت الوحدة من المنتج الأول تستغرق عملية إنتاجها على كل من الآلة الأولى والثانية 4 ساعات، وساعتين على التوالى، بينما تحتاج الوحدة من المنتج الثانى إلى ساعتين على الآلة الأولى، و(4) ساعات على الالة الثانية. فإذا كان ربح الوحدة من المنتج الأول (12) جنيه، وربح الوحدة من المنتج الثانى (8) جنيهات.

المطلوب:

أ- صياغة نموذج البرمجة الخطية لتلك المشكلة.

ب- استخدام الطريقة البيانية لأسلوب البرمجة الخطية فى ايجاد المزيج السلعى الذى يحقق أكبر ربح ممكن.

تمرين (12): فى ضوء البيانات التالية استخدم الطريقة البيانية لأسلوب البرمجة الخطية فى تحديد تشكيلة المنتجات التى تخفض التكاليف إلى أدنى حد ممكن:

دالة التكاليف (ت) = 2 $س_1$ + 5 $س_2$

فى ظل القيود:

20 $س_1$ + 10 $س_2$ $\leq$ 200

$س_1$ $\geq$ 20

$س_1$ + $س_2$ = 16

$س_1$ ، $س_2$ $\leq$ صفر

الفصل الثالث

البرمجة الخطية / أسلوب السمبلكس

Linear Programming – Simplex Method

- مقدمة.
- خطوات الحل باستخدام أسلوب السمبلكس:

أولاً: استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشاكل تعظيم الربح.

ثانياً: استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشاكل تدنية التكاليف.

- بعض المشاكل الخاصة عند استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشكلات البرمجة الخطية:

المشكلة الأولى: حالة تعادل القيم الموجبة (أو السالبة) فى الصف الأخير.

المشكلة الثانية: مشكلة عدم الانتظام.

المشكلة الثالثة: حالة وجود أكثر من حل أمثل.

المشكلة الرابعة: مشكلة عدم وجود حل ممكن.

المشكلة الخامسة: مشكلة الحل غير المحدد (عدم وجود منطقة حلول ممكنة).

- أسعار الظل.
- تمارين للتدريب.

البرمجة الخطية / أسلوب السمبلكس

مقدمة:

تبين من الفصل السابق كيف تستخدم الطريقة البيانية فى حل مشكلة البرمجة الخطية بسهولة نظراً لوجود متغيرين فقط أو سلعتين اثنين أمكن تمثيل كل منهم على أحد الإحداثين الرأسي والأفقي، أما فى حالة تعدد المتغيرات أو المنتجات فإنه من غير الممكن استخدام الطريقة البيانية، وفى مثل هذه الحالات لابد من استخدام أسلوب السمبلكس Simplex Method الذى يصلح لحل مشاكل البرمجة الخطية التى تتسم بتعدد القيود والمتغيرات. ويعتبر أسلوب السمبلكس من أكفأ الطرق المستخدمة فى حل مشاكل البرمجة الخطية، وهو أسلوب يعتمد على فكرة الوصول إلى الحل الأمثل للمشاكل عن طريق مجموعة من الدورات، بحيث تسعى كل دورة منها إلى تحسين الحل عن الدورة التى تسبقها. وتبدأ هذه الطريقة عادة باعداد المشكلة فى شكل جبرى، ثم اعداد جدول السمبلكس ثم اختيار الحل المبدئى ثم البحث عن حل أو مجموعة من الحلول أفضل من الحل المبدئى وذلك حتى نصل إلى الحل الذى يحقق دالة الهدف سواء تعظيم الربح أو تدنية التكاليف. وتعتمد طريقة السمبلكس بصفة أساسية على استخدام جبر المصفوفات كأسلوب لحل مشاكل البرمجة الخطية، وعلى وجه الخصوص تعتبر طريقة – جاوس جوردن للحذف الكامل Gauss–Jordon Complete Elimination والتى تستخدم لحل مجموعة من المعادلات أنياً هى الأساس الذى بنيت عليه طريقة السمبلكس.

خطوات الحل باستخدام أسلوب السمبلكس:

توجد مجموعة من الخطوات لحل مشاكل البرمجة الخطية سواء أكانت مشكلة تعظيم الربح أو تدنية التكاليف وتتمثل هذه الخطوات فيما يلى:

1- صياغة المشكلة محور الدراسة فى صورة النموذج الرياضى للبرمجة الخطية والذى يشمل: دالة الهدف، والقيود، وشرط عدم السالبية، أى استخدام متباينات تصف دالة الهدف ومحددات المشكلة.

2- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) وذلك بإضافة متغيرات تختلف حسب أنواع القيود:

أ- إذا كان اتجاه المتباينة (≥) يتم إضافة متغير عاطل (ع) قيمته فى دالة الهدف = صفر، وفى بقية القيود قيمته أيضاً = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته = +1.

ب- إذا كان اتجاه المتباينة (=) يتم إضافة متغير وهى (و) قيمته فى دالة الهدف = (-م) فى حالة تعظيم الربح، وقيمته فى دالة الهدف = (+م) فى حالة تدنية التكاليف. وفى بقية القيود قيمته = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته = +1.

ج- إذا كان اتجاه المتباينة (≤) يتم إضافة متغير وهمى (و) قيمته فى دالة الهدف = (-م) فى حالة تعظيم الربح، وقيمته فى دالة الهدف = (+م) فى حالة تدنية التكاليف. وفى بقية القيود قيمته أيضاً = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته = +1. وكذلك يتم طرح متغير فائض (ف) قيمته فى دالة الهدف = صفر، وفى بقية القيود قيمته أيضاً = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته = -1.

3- اعداد جدول الحل المبدئى عن طريق ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف.

4- تحديد المتغير الذى يدخل الحل، وهو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) وذلك فى حالة مشكلة تعظيم الربح، وصاحب أكبر قيمة سالبة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) وذلك فى حالة

مشكلة تدنية التكاليف. ويطلق على عمود المتغير الذى يدخل الحل عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذى يترك الحل وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود المتغير الذى يدخل الحل (عمود البؤرة)، ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب. ويطلق على صف المتغير الذى يترك الحل صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة وهو الرقم الذى يمثل نقطة تقاطع عمود المتغير الذى يدخل الحل (عمود البؤرة) مع صف المتغير الذى يترك الحل (صف البؤرة).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير الذى يدخل الحل، وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى صف المتغير الذى يترك الحل (صف البؤرة) على رقم البؤرة وذلك لتحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح.

8- حساب القيم الجديدة للمتغيرات الأخرى (الصفوف الأخرى) فى جدول الحل التالى وذلك باستخدام المعادلة التالية.

قيم أى صف جديد = [**القيم الموجودة فى الصف المراد نقله إلى الجدول الجديد**] – [**القيم المقابلة لصف المتغير الجديد الذى يدخل الحل**] × [**نقطة تقاطع هذا الصف مع عمود البؤرة**]

9- اعداد جدول السمبلكس الثانى.

10- تحديد ما إذا كان جدول السمبلكس الثانى يمثل جدول الحل الأمثل أم لا حيث:

أ- نصل إلى الحل الأمثل فى حالة مشكلة تعظيم الربح إذا كانت كل الأرقام الموجودة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) قيم صفرية أو سالبة.

ب- نصل إلى الحل الأمثل فى حالة مشكلة تدنية التكاليف إذا كانت كل الأرقام الموجودة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) قيم صفرية أو موجبة.

11- إذا لم يكن جدول السمبلكس الثانى هو جدول الحل الأمثل نكرر الخطوات السابقة من (4) إلى (10) مرة أخرى حتى نصل إلى الحل الأمثل.

ملاحظات هامة عند استخدام أسلوب السمبلكس:

1- المتغيرات الأساسية فى أى جدول سمبلكس (متغيرات الحل) تكون معاً مصفوفة الوحدة.

2- قيم المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى أى جدول سمبلكس هى قيم صفرية.

3- إذا تساوت أرقام متغيرين فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى أى جدول سمبلكس يفضل عند اختيار المتغير الذى يدخل الحل اختيار المتغيرات س$_1$، س$_2$ ...... بدلاً من المتغيرات العاطلة (ع$_1$، ع$_2$، ......) أو المتغيرات الوهمية (و$_1$، و$_2$ ......).

4- عند تحديد المتغير الذى يترك الحل إذا تساوى ناتج أقل ناتج قسمة موجب لمتغيرين يفضل فى هذه الحالة إخراج المتغيرات الوهمية (و$_1$، و$_2$ ......) أولاً ثم بعد ذلك إخراج المتغيرات العاطلة (ع$_1$، ع$_2$ ....).

5- عند تكوين جدول السمبلكس المبدئى فإن المتغيرات التى تظهر فى عمود المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) هى متغيرات الطاقة العاطلة (ع) والمتغيرات الوهمية (و)، أما المتغيرات الفائضة (ف) فهى لا تظهر أو لا تدخل ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول السمبلكس المبدئى ولكنها يمكن أن تظهر فى جداول الحل بعد جدول السمبلكس المبدئى.

أولاً: استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشاكل تعظيم الربح:

مثال (1): حاول أن تحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

عظم (ر) = 3 $س_1$+ 2 $س_2$

فى ظل أن:

$س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 6

2 $س_1$ + $س_2$ ≥ 6

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

الحـــل

1- حيث أن المشكلة تم صياغتها فى شكل النموذج الرياضى للبرمجة الخطية ننتقل إلى الخطوة (2).

2- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) كما يلى:

- $س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 6 حيث أن اتجاه المتباينة (≥) يتم إضافة متغير عاطل ($ع_1$) وبالتالى تصبح المعادلة كما يلى:

$س_1$ + 2 $س_2$ + $ع_1$ = 6

- 2 $س_1$ + $س_2$ ≥ 6 حيث أن اتجاه المتباينة (≥) يتم إضافة متغير عاطل ($ع_2$) وبالتالى تصبح المعادلة كما يلى:

2$س_1$ + $س_2$ + $ع_2$ = 6

3- ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

عظم (ر) = 3 $س_1$ + 2 $س_2$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$

في ظل أن:

$س_1$ + 2 $س_2$ + ع1 + صفر $ع_2$ = 6

2 $س_1$ + $س_2$ + صفر $ع_1$ + $ع_2$ = 6

4- اعداد جدول السمبلكس المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

م ز			3	2	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
صفر	$ع_1$	6	1	2	1	صفر
صفر	$ع_2$	6	2	1	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز – ل ز		3	2	صفر	صفر

لاحظ أنه في جدول السمبلكس السابق المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) $ع_1$ ، $ع_2$ كونت معاً مصفوفة الوحدة، كما أن قيم المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) $ع_1$ ، $ع_2$ فى الصف الأخير (م ز – ل ز) تساوى صفر.

تم حساب الأرقام الموجودة فى الصف (ل ز) عن طريق ضرب ربح الوحدة للمتغيرات الأساسية فى الأرقام المناظرة فى مصفوفة المعاملات لكل عمود ثم جمعها بعد ذلك. ومثال ذلك الخانة الموجودة فى الصف (ل ز) عند عمود قيم متغيرات الحل محسوبة كالآتى:

(6 × صفر) + (6 × صفر) = صفر

وكذلك فإن الخانة الثانية عند عمود $س_1$ فى الصف (ل ز) محسوبة كالآتى:

(1 × صفر) + (2 × صفر) = صفر

وباقى الخانات محسوبة كالآتى:

عند عمود $س_2$: (2 × صفر) + (1 × صفر) = صفر

عند عمود $ع_1$: (1 × صفر) + (صفر × صفر) = صفر

عند عمود $ع_2$: (صفر × صفر) + (1 × صفر) = صفر

وبتأمل هذه الأرقام نجد أن الرقم الموجود عند عمود قيم متغيرات الحل فى الصف (ل ز) يعبر عن ربح الحل. فعدم إنتاج $س_1$، $س_2$ سوف يجعل $ع_1$، $ع_2$ أقصى ما يمكن، والربح المحقق منهم هو الصفر.

تم حساب الأرقام الموجودة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) عن طريق طرح الأرقام الموجودة فى الصف ($ل_ز$) من الأرقام المعبرة عن ربح الوحدة الموجودة فى الصف ($م_ز$) أعلى الجدول، فمثلاً الخانة الأولى فى الصف ($م_ز - ل_ز$) عند عمود $س_1$ عبارة عن 3- صفر= 3 وهكذا لباقى خانات الصف ($م_ز - ل_ز$).

4- تحديد المتغير الذى يدخل الحل، وهو المتغير ($س_1$) صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$)، ويطلق على عمود المتغير ($س_1$) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذى يترك الحل وذالك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود المتغير الذى يدخل الحل (عمود البؤرة $س_1$) ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب كما يلى:

- عند $ع_1$: 6 ÷ 1 = 6
- عند $ع_2$: 6÷ 2 = 3 ← أقل ناتج قسمة موجب

وبالتالى فإن المتغير ($ع_2$) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير($ع_2$) صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة: وهو الرقم الذى يمثل نقطة تقاطع عمود البؤرة (عمود المتغير $س_1$) مع صف البؤرة (صف المتغير $ع_2$) بالتالى فإن رقم البؤرة هو الرقم (2).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير ($س_1$) الذى يدخل الحل في جدول السمبلكس الثاني: وذلك عن طريق قسمة الأرقام الموجودة فى صف البؤرة أى صف المتغير ($ع_2$) على رقم البؤرة، وبالتالى تصبح أرقام صف المتغير ($س_1$) في جدول السمبلكس الثاني كما يلى:

$$6 \div 2 = 3$$

$1 = 2 \div 2$

$\frac{1}{2} = 2 \div 1$

صفر ÷ 2 = صفر

$\frac{1}{2} = 2 \div 1$

∴ قيم الصف ($س_1$) الجديدة هي: (3 ، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، صفر ، $\frac{1}{2}$)

8- تحديد قيم الصف ($ع_1$) في جدول السمبلكس الثاني:

قيم صف $ع_1$ الجديدة = قيم الصف $ع_1$ القديمة – (القيم المقابلة لصف $س_1$ الجديدة × رقم تقاطع صف $ع_1$ مع عمود البؤرة).

6- (3 × 1) = صفر

1- (1 × 1) = صفر

2- ($\frac{1}{2}$ × 1) = $\frac{3}{2}$

1- (صفر ×1) = 1

صفر – ($\frac{1}{2}$ × 1) = – $\frac{1}{2}$

وبالتالى تصبح قيم ($ع_1$) الجديدة هى:

(3 ، صفر ، $\frac{3}{2}$ ، 1 ، – $\frac{1}{2}$)

9- اعداد جدول السمبلكس الثانى

جدول السمبلكس الثانى

م ز			3	2	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$
صفر	ع$_1$	3	صفر	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
3	س$_1$	3	1	$\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{1}{2}$
	ل ز	9	3	$\frac{3}{2}$	صفر	$\frac{3}{2}$
	م ز − ل ز		صفر	$\frac{1}{2}$	صفر	$-\frac{3}{2}$

لاحظ أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل لوجود قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز − ل ز) فى خانة عمود المتغير (س$_2$). وبالتالى نكرر الخطوات من (4) إلى (9) للوصول إلى جدول السمبلكس الثالث كما يلى:

1− تحديد المتغير الذى يدخل الحل: وهو المتغير (س$_2$) صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز − ل ز) ويطلق على عمود (س$_2$) عمود البؤرة.

2− تحديد المتغير الذى يترك الحل: وهو المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب للأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود البؤرة.

- عند ع$_1$: $3 \div \frac{3}{2} = 2$ ← أقل ناتج قسمة موجب
- عند س$_1$: $3 \div \frac{1}{2} = 6$

وبالتالى فإن المتغير (ع$_1$) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (ع$_1$) صف البؤرة.

3− تحديد رقم البؤرة: رقم البؤرة هو ($\frac{3}{2}$).

4- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س$_2$) الذى يدخل الحل في جدول السمبلكس الثالث: وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى صف البؤرة (صف المتغير ع$_1$) على رقم البؤرة كما يلى:

$3 \div \frac{3}{2} = 2$ ، صفر ÷ $\frac{3}{2}$ = صفر، $\frac{3}{2} \div \frac{3}{2} = 1$ ، $1 \div \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ ،

$-\frac{1}{2} \div \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$

وبالتالى فإن قيم الصف (س$_2$) فى الجدول الجديد هى:

(2 ، صفر ، 1 ، $\frac{2}{3}$ ، $-\frac{1}{3}$)

5- تحديد قيم الصف (س$_1$) في جدول السمبلكس الثالث:

قيم صف س$_1$ الجديدة = قيم الصف س$_1$ القديمة – (القيم المقابلة لصف س$_2$ الجديدة × رقم تقاطع صف س$_1$ مع عمود البؤرة)

3- ($2 \times \frac{1}{2}$) = 2 ، 1- (صفر × $\frac{1}{2}$) = 1

$\frac{1}{2}$ – (1 × $\frac{1}{2}$) = صفر ، صفر – ($\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$) = $-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$ – ($-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$) = $\frac{2}{3}$

وبالتالى فإن قيم الصف (س$_1$) فى الجدول الجديد هى:

(2 ، 1 ، صفر ، $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$)

6- اعداد جدول السمبلكس الثالث:

جدول السمبلكس الثالث

			صفر	صفر	2	3
		م ز				
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
2	$س_2$	2	صفر	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
3	$س_1$	2	1	صفر	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	ل ز	10	3	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	م ز – ل ز		صفر	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$

ويتضح من جدول السمبلكس الثالث أنه جدول الحل الأمثل لأن كل القيم فى الصف الأخير (م ز – ل ز) قيم صفرية أو سالبة ويتمثل الحل الأمثل فيما يلي:

$س_1 = 2$ ، $س_2 = 2$ ← متغيرات اساسية

$ع_1 =$ صفر ، $ع_2 =$ صفر ← متغيرات غير أساسية

وأن ربح الحل هو (10) جنيه

وذلك يعنى أن جدول السمبلكس الثالث هو جدول الحل الأمثل والذى يقضى بإنتاج الشركة وحدتين من المنتج $س_1$، ووحدتين من المنتج $س_2$، وذلك يحقق أقصى ربح ممكن وهو (10) جنيه.

مثال (2):

حاول أن تحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

عظم (ر) = 2 $س_1$ + $س_2$

فى ظل أن:

3 $س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 6

$س_1 + 2 س_2 \geq 4$

$س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر

الحـــل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) كما يلى:

$3 س_1 + 2 س_2 + ع_1 = 6$ (حيث $ع_1$ متغير عاطل).

$س_1 + 2 س_2 - ف_1 + و_1 = 4$ (حيث $ف_1$ متغير فائض، $و_1$ متغير وهمي).

2- ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

عظم (ر) = $2 س_1 + س_2$ + صفر $ع_1$ + صفر $ف_1$ − م $و_1$

في ظل أن:

$3 س_1 + 2 س_2 + ع_1$ + صفر $ف_1$ + صفر $و_1 = 6$

$س_1 + 2 س_2$ + صفر $ع_1 - ف_1 + و_1 = 4$

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

		م ز	2	1	صفر	صفر	− م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ف_1$	$و_1$
صفر	$ع_1$	6	3	2	1	صفر	صفر
− م	$و_1$	4	1	2	صفر	−1	1
	ل ز	−4 م	− م	−2م	صفر	م	− م
	م ز − ل ز		2 + م	1 + 2م	صفر	− م	صفر

4- تحديد المتغير الذى يدخل الحل: وهو المتغير ($س_2$) صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز − ل ز) ويطلق على عمود المتغير ($س_2$) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذى يترك الحل: وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود البؤرة (عمود المتغير س$_2$) ثم نختار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب ليترك الحل كما يلى:

- عند ع$_1$: 6 ÷ 2 = 3
- عند و$_1$: 4 ÷ 2 = 2 ← صاحب أقل ناتج قسمة موجب.

وبالتالى فإن المتغير (و$_1$) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (و$_1$) صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة: وهو الرقم الذى يمثل نقطة تقاطع عمود البؤرة مع صف البؤرة، وهذا الرقم هو (2).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س$_2$) الذى يدخل الحل في جدول السمبلكس الثاني: وذلك عن طريق قسمة الأرقام الموجودة فى صف البؤرة (صف المتغير و$_1$) على رقم البؤرة وذلك لتحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح كما يلى:

4 ÷ 2 =2 ، 1 ÷ 2 = $\frac{1}{2}$ ، 2 ÷ 2 = 1 ، صفر ÷ 2 = صفر ،

-1 ÷ 2 = - $\frac{1}{2}$ ، 1 ÷ 2 = $\frac{1}{2}$

وبالتالى تصبح أرقام صف المتغير (س$_2$) فى الجدول الجديد كما يلى:

(2 ، $\frac{1}{2}$ ، 1 ، صفر ، - $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$).

8- تحديد قيم الصف (ع$_1$) في جدول السمبلكس الثاني:

قيم صف ع$_1$ الجديدة = قيم الصف ع$_1$ القديمة - (القيم المقابلة لصف س$_2$ الجديدة × رقم تقاطع صف ع$_1$ مع عمود البؤرة)

6- (2×2) = 2

3 - ($\frac{1}{2}$ × 2) = 2

2 - (1 × 2) = صفر

1 − (صفر × 2) = 1

صفر − (− $\frac{1}{2}$ × 2) = 1

صفر − ($\frac{1}{2}$ × 2) = − 1

وبالتالى فإن قيم الصف (ع1) فى الجدول الجديد هى:

(2 ، 2 ، صفر ، 1 ، 1 ، −1)

9− اعداد جدول السمبلكس الثانى:

جدول السمبلكس الثانى

م ز			2	1	صفر	صفر	− م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ف1	و1
صفر	ع1	2	2	صفر	1	1	1−
1	س2	2	$\frac{1}{2}$	1	صفر	− $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	ل ز	2	$\frac{1}{2}$	1	صفر	− $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
م ز− ل ز			$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	− م − $\frac{1}{2}$

لاحظ أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل لوجود قيم موجبة فى الصف الأخير (م ز − ل ز) وبالتالى يستكمل الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

1− تحديد المتغير الذى يدخل الحل وهو المتغير (س1) صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز − ل ز) ويطلق على عمود (س1) عمود البؤرة.

2− تحديد المتغير الذى يترك الحل:

- عند ع1 : 2 ÷ 2 = 1 ← صاحب أقل ناتج قسمة موجب
- عند س2 : 2 ÷ $\frac{1}{2}$ = 4

∴ المتغير (ع1) يترك الحل ويترك على صف (ع1) صف البؤرة.

3− تحديد رقم البؤرة: هو الرقم (2).

4- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س$_1$) الذى يدخل الحل في جدول السمبلكس الثالث: وذلك عن طريق قسمة الأرقام الموجودة فى صف البؤرة (صف المتغير ع$_1$) على رقم البؤرة وذلك لتحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح كما يلى:

$2 \div 2 = 1$ ، $2 \div 2 = 1$ ، صفر $\div 2 =$ صفر ، $1 \div 2 = \frac{1}{2}$ ،

$1 \div 2 = \frac{1}{2}$ ، $-1 \div 2 = -\frac{1}{2}$

وبالتالى فإن قيم الصف (س$_1$) فى الجدول الجديد هى:

(1 ، 1 ، صفر ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$).

5-تحديد قيم الصف (س$_2$) في جدول السمبلكس الثالث:

قيم صف س$_2$ الجديدة = قيم الصف س$_2$ القديمة – (القيم المقابلة لصف س$_1$ الجديدة × رقم تقاطع صف س$_2$ مع عمود البؤرة)

$2 - (1 \times \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} - (1 \times \frac{1}{2}) =$ صفر

$1 -$ (صفر $\times \frac{1}{2}) = 1$

صفر $- (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

وبالتالى فإن قيم الصف (س$_2$) فى الجدول الجديد هى:

($\frac{3}{2}$ ، صفر ، 1 ، $-\frac{1}{4}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$)

6- اعداد جدول السمبلكس الثالث:

جدول السمبلكس الثالث

م ز			2	1	صفر	صفر	– م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ف1	و1
2	س1	1	1	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	س2	$\frac{3}{2}$	صفر	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
	ل ز	$\frac{7}{2}$	2	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
	م ز – ل ز		صفر	صفر	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	– م + $\frac{1}{4}$

يتضح من جدول السمبلكس الثالث أن كل القيم الموجودة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) هى قيم سالبة أو صفرية وبالتالى يعد جدول الحل الثالث هو جدول الحل الأمثل ويتضح منه أن الحل الأمثل هو:

س1 = 1 ، س2 = $\frac{3}{2}$ ، ع1 = صفر ، ف1 = صفر ، و1 = صفر.

وأن أقصى ربح يمكن تحقيقة هو ($\frac{7}{2}$) جنيه .

ثانياً: استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشاكل تدنية التكاليف:

توجد بعض الإختلافات التى يجب مراعاتها عند استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشاكل تدنية التكاليف بالمقارنة باستخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشاكل تعظيم الربح وهذه الاختلافات تتمثل فيما يلى:

1- يظهر المتغير الوهمى (و) فى دالة الهدف فى حالة تعظيم الربح بقيمة (–م)، أما فى دالة الهدف فى حالة تدنية التكاليف فيظهر بقيمة (+م).

2- لاستكمال خطوات الحل للوصول إلى الحل الأمثل يتم اختيار المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى حالة تعظيم الربح، أما فى حالة تدنية التكاليف فيتم اختيار المتغير صاحب أكبر رقم أمامه

إشارة سالبة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) ليدخل الحل ليساهم فى تخفيض التكاليف بأكبر قدر ممكن.

3- نصل إلى الحل الأمثل فى حالة مشكلة تعظيم الربح إذا كانت كل الأرقام الموجودة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) فى جدول السمبلكس كلها قيم صفرية أو سالبة، بينما نصل إلى الحل الأمثل فى حالة مشكلة تدنية التكاليف إذا كانت كل الأرقام الموجودة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) فى جدول السمبلكس كلها قيم صفرية أو موجبة.

مثال (3):

حاول أن تحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

تدنية (ت) = 5 $س_1$ + 6 $س_2$

فى ظل أن:

$س_1$ + 3 $س_2$ ≥ 9

4 $س_2$ ≤ 8

5 $س_1$ = 10

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

الحـــل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) كما يلى:

$س_1$ + 3 $س_2$ + $ع_1$ = 9 (حيث $ع_1$ متغير عاطل).

4 $س_2$ – $ف_1$ + $و_1$ = 8 (حيث $ف_1$ متغير فائض، $و_1$ متغير وهمى).

5 $س_1$ + $و_2$ = 10 (حيث $و_2$ متغير وهمى).

2- ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

تدنية (ت) = 5 $س_1$ + 6 $س_2$ + صفر $ع_1$ + صفر $ف_1$ + م $و_1$ + م $و_2$

في ظل أن:

$س_1$ + 3 $س_2$ + $ع_1$ + صفر $ف_1$ + صفر $و_1$ + صفر $و_2$ = 9

صفر س$_1$ + 4 س$_2$ + صفر ع$_1$ – ف$_1$ + و$_1$ + صفر و$_2$ = 8

5 س$_1$ + صفر س$_2$ + صفر ع$_1$ + صفر ف$_1$ + صفر و$_1$ + و$_2$ = 10

3- اعداد جدول الحل المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

م ز			5	6	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ف$_1$	و$_1$	و$_2$
صفر	ع$_1$	9	1	3	1	صفر	صفر	صفر
م	و$_1$	8	صفر	4	صفر	-1	1	صفر
م	و$_2$	10	5	صفر	صفر	صفر	صفر	1
	ل ز	18م	5 م	4 م	صفر	– م	م	م
م ز – ل ز			5- 5م	6 -4 م	صفر	م	صفر	صفر

4- تحديد المتغير الذى يدخل الحل: وهو المتغير (س$_1$) صاحب أكبر قيمة سالبة (أكبر رقم أمامه إشارة سالبة) فى الصف الأخير (م ز – ل ز) ويطلق على عمود المتغير (س$_1$) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذى يترك الحل، وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود المتغير الذى يدخل الحل (س$_1$) (عمود البؤرة) ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب ليترك الحل كما يلى:

- عند ع$_1$: 9 ÷ 1 = 9
- عند و$_1$ = 8÷ صفر = ليس لها معنى
- عند و$_2$: 10 ÷ 5 = 2 ← صاحب أقل ناتج قسمة موجب

وبالتالى فإن المتغير (و$_2$) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (و$_2$) صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة وهو الرقم الذى يمثل نقطة تقاطع عمود البؤرة ($س_1$) مع صف البؤرة ($و_2$) ورقم البؤرة هو الرقم (5).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير الجديد الذى يدخل الحل فى جدول السمبلكس الثانى وهو المتغير ($س_1$): وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى صف المتغير الذى يترك الحل ($و_2$) على رقم البؤرة لتحويل رقم البؤرة إلى الواحد الصحيح كما يلى:

10 ÷ 5 = 2 ، 5 ÷ 5 = 1 ، صفر ÷ 5 = صفر ، صفر ÷ 5 = صفر، صفر ÷ 5 = صفر ، صفر ÷ 5 = صفر، 1 ÷ 5 = $\frac{1}{5}$

وبالتالى تصبح قيم الصف ($س_1$) فى جدول السمبلكس الثانى هى: (2 ، 1 ، صفر ، صفر ، صفر ، صفر، $\frac{1}{5}$).

8- تحديد قيم الصف ($ع_1$) فى جدول السمبلكس الثانى كما يلى:

قيم صف $ع_1$ الجديدة = قيم الصف $ع_1$ القديمة - (القيم المقابلة لصف $س_1$ الجديدة × رقم تقاطع صف $ع_1$ مع عمود البؤرة)

9- (2 × 1) = 7

1 - (1 × 1) = صفر

3- (صفر × 1) = 3

1- (صفر × 1) = 1

صفر - (صفر × 1) = صفر

صفر - (صفر × 1) = صفر

صفر - ($\frac{1}{5}$ × 1) = - $\frac{1}{5}$

وبالتالى تصبح قيم الصف ($ع_1$) فى جدول السمبلكس الثانى كما يلى:

(7 ، صفر ، 3 ، 1 ، صفر ، صفر، - $\frac{1}{5}$) .

9- تحديد قيم الصف ($و_1$) فى جدول السمبلكس كما يلى:

قيم صف $و_1$ الجديدة = قيم الصف $و_1$ القديمة − (القيم المقابلة لصف $س_1$ الجديدة × رقم تقاطع صف $و_1$ مع عمود البؤرة)

8− (2 × صفر) = 8

صفر − (1 × صفر) = صفر

4− (صفر × صفر) = 4

صفر − (صفر × صفر) = صفر

−1 (صفر × صفر) = −1

1− (صفر × صفر) = 1

صفر − ($\frac{1}{5}$ × صفر) = صفر

وبالتالى تصبح قيم الصف ($و_1$) فى جدول السمبلكس الثانى كما يلى:

(8 ، صفر ، 4 ، صفر ، −1 ، 1 ، صفر)

لاحظ أن: قيم الصف ($و_1$) فى جدول السمبلكس الثانى هى نفسها قيم الصف ($و_1$) فى جدول السمبلكس المبدئى لأن نقطة تقاطع الصف ($و_1$) مع عمود البؤرة ($س_1$) = صفر.

10− اعداد جدول السمبلكس الثانى:

جدول السمبلكس الثانى

تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ف_1$	$و_1$	$و_2$
	م ز		5	6	صفر	صفر	م	م
صفر	$ع_1$	7	صفر	3	1	صفر	صفر	$-\frac{1}{5}$
م	$و_1$	8	صفر	4	صفر	−1	1	صفر
5	$س_1$	2	1	صفر	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{5}$
	ل ز	8 م + 10	5	4 م	صفر	− م	م	1
	م ز − ل ز		صفر	6− 4 م	صفر	م	صفر	م − 1

لاحظ أن جدول السمبلكى الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل لوجود قيمة سالبة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى خانة عمود المتغير (س2) وبالتالى نستكمل الحل حتي الوصول إلي الحل الأمثل كما يلى:

1- تحديد المتغير الذى يدخل الحل وهو المتغير (س2) ويطلق على عمود المتغير (س2) عمود البؤرة.

2- تحديد المتغير الذى يترك الحل وهو المتغير (و1) ويطلق على صف المتغير (و1) صف البؤرة.

3- تحديد رقم البؤرة وهو نقطة تقاطع عمود البؤرة (س2) مع صف البؤرة (و1) ورقم البؤرة هو (4).

4- تحدد القيمة الجديدة لصف المتغير الجديد (س2) فى جدول السمبلكس الثالث وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى صف المتغير الذى يترك الحل (و1) على رقم البؤرة.

وتصبح قيم الصف (س2) فى جدول السمبلكس الثالث كما يلى:

(2، صفر، 1، صفر، $-\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، صفر).

5- تحديد قيم الصف (س1) فى جدول السمبلكس الثالث وهى:

(2، 1، صفر، صفر، صفر، صفر، $\frac{1}{5}$).

6- تحديد قيم الصف (ع1) فى جدول السمبلكس الثالث وهى:

(1، صفر، صفر، 1، $\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، $-\frac{1}{5}$).

7- اعداد جدول السمبلكس الثالث:

جدول السمبلكس الثالث

م ز			5	6	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ف$_1$	و$_1$	و$_2$
صفر	ع$_1$	1	صفر	صفر	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{5}$
6	س$_2$	2	صفر	1	صفر	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	صفر
5	س$_1$	2	1	صفر	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{5}$
	ل ز	22	5	6	صفر	$-\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$	1
م ز − ل ز			صفر	صفر	صفر	$\frac{6}{4}$	م − $\frac{6}{4}$	م −1

يتضح من جدول السمبلكس الثالث أن كل القيم الموجودة فى الصف الأخير (م ز − ل ز) هى قيم موجبة أو صفرية وبالتالى يعد جدول السمبلكس الثالث هو جدول الحل الأمثل، ويتمثل الحل فى:

س$_1$ = 2 ، س$_2$ = 2 ، ع$_1$ = 1 أى توجد طاقة عاطلة مقدارها وحدة واحدة.

وأقل تكلفة هى (22) جنيه.

بعض المشاكل الخاصة عند استخدام أسلوب السمبلكس فى حل مشكلات البرمجة الخطية:

المشكلة الأولى: حالة تعادل القيم الموجبة (أو السالبة) فى الصف الأخير:

تظهر هذه المشكلة عند اختيار المتغير الذى يدخل الحل عند القيام بخطوات تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، حيث تنص القاعدة على اختيار المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة فى حالة تعظيم الربح، واختيار المتغير صاحب أكبر قيمة سالبة (أكبر رقم أمامه إشارة سالبة) فى حالة تدنية التكاليف ونواجه أحياناً مشكلة عندما تتعادل القيم الموجبة أو السالبة الخاصة بالمتغيرات

الغير أساسية المرشحة لأن تدخل الحل لتعتبر متغيرات أساسية وفى مثل هذه الحالة يمكن أن يتم الاختيار من بينها بشكل تحكمى.

فاختيار أى من هذه المتغيرات سوف يوصل فى النهاية إلى الحل الأمثل بعد خطوات معينة، ولكن يفضل حتى يمكن تقليل عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل إتباع النصائح التالية:

1- إذا كان التعادل بين متغيراً أصلياً (س$_1$ ، س$_2$ ، ....) ومتغيراً إضافياً (ع$_1$ ، ع$_2$ .....) فيفضل اختيار المتغير الأصلى لأن يدخل الحل.

2- إذا كان التعادل بين متغيرين أصليين (س$_1$، س$_2$ .....) فيتم اختيار أى منهما بطريقة عشوائية.

3- إذا كان التعادل بين متغيرين إضافيين (ع$_1$ ، ع$_2$، ....) فيتم اختيار أى منهما بطريقة عشوائية.

المشكلة الثانية: مشكلةعدم الانتظام:

يعتبر الحل غير منتظم أو تظهر حالة عدم الانتظام فى مشاكل البرمجة الخطية عندما يوجد أحد القيود المتكررة وغير الضرورية فمثلاً لو حدث أن:

س$_1$ ≤ 20

س$_2$ ≤ 20

س$_1$ + س$_2$ ≤ 40

فى مثل هذه الحالة يعتبر القيد الثالث غير ضرورياً.

ويتم اكتشاف حالة عدم الانتظام عند تحديد المتغير الذى يترك الحل وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود البؤرة، ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب. ويحدث أحياناً أن يتعادل خارج القسمة لمتغيرين أو أكثر، والخطوة الأساسية فى هذه الحالة هى أن يتم اختيار أحد المتغيرات الذى يترك الحل عشوائياً وقد ينتج عن ذلك الوصول إلى حل جديد فى جدول السمبلكس التالى قيمة أحد المتغيرات

الأساسية فيه تعادل الصفر ويظهر ذلك من عمود قيم متغيرات الحل. ويمكن توضيح حالة عدم الانتظام من خلال المثال التالى:

مثال (4):

عظم (ر) = 80 $س_1$ + 70 $س_2$

فى ظل أن:

2 $س_1$ + $س_2$ ≥ 120

$س_1$ ≥ 70

$س_1$ + $س_2$ ≥ 60

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحــل

أولاً: حل المشكلة باستخدام أسلوب السمبلكس:

1- تحويل المتباينات إلى متساويات

2 $س_1$ + $س_2$ + $ع_1$ = 120 ← $ع_1$ متغير عاطل.

$س_1$ + $ع_2$ = 70 ← $ع_2$ متغير عاطل

$س_1$+ $س_2$ +$ع_3$ = 60 ← $ع_3$ متغير عاطل

2- ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

(ر) = 80 $س_1$ + 70 $س_2$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3$

فى ظل أن:

2 $س_1$ + $س_2$ +$ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3$ = 120

$س_1$ + صفر $س_2$ + صفر $ع_1$ + $ع_2$ + صفر $ع_3$ = 70

$س_1$ + $س_2$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$ + $ع_3$ = 60

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
م ز			80	70	صفر	صفر	صفر
صفر	ع$_1$	120	2	1	1	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	70	1	صفر	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	60	1	1	صفر	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز – ل ز		80	70	صفر	صفر	صفر

4- تحديد المتغير الذى يدخل الحل: وهو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف (م ز– ل ز) وهو المتغير (س$_1$) ويطلق على عمود المتغير (س$_1$) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذى يترك الحل: وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود المتغير الذى يدخل الحل (س$_1$) (عمود البؤرة) ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب ليترك الحل كما يلى:

- عند ع$_1$: $120 \div 2 = 60$
- عند ع$_2$: $70 \div 1 = 70$
- عند ع$_3$: $60 \div 1 = 60$

ويلاحظ تساوى ناتج القسمة الموجب لكل من المتغيرين ع$_1$ ، ع$_3$

فإذا قمنا باختيار (ع$_1$) كمتغير يترك الحل ← صف البؤرة فماذا سيحدث ؟

(س$_1$) يحل محل (ع$_1$) ورقم البؤرة هو الرقم (2).

6- تحديد قيم الصف (س$_1$) فى جدول السمبلكس الثاني: وذلك بقسمة قيم الصف ع$_1$ ÷ رقم البؤرة

∴ قيم (س$_1$) الجديدة هي: [60 ، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، صفر ، صفر]

7- تحديد قيم الصف (ع$_2$) فى جدول السمبلكس الثاني:

قيم الصف ع$_2$ الجديدة = قيم الصف ع$_2$ القديمة – (القيم المقابلة لصف س$_1$ الجديدة × رقم تقاطع صف ع$_2$ مع عمود البؤرة)

70 – (60 × 1) = 10

1 – (1 × 1) = صفر

صفر – ($\frac{1}{2}$ × 1) = – $\frac{1}{2}$

صفر – ($\frac{1}{2}$ × 1) = – $\frac{1}{2}$

1 – (صفر × 1) = 1

صفر – (صفر × 1)= صفر

∴ قيم (ع$_2$) الجديدة هي: [10 ، صفر ، – $\frac{1}{2}$ ، – $\frac{1}{2}$ ، 1 ، صفر]

8- تحديد قيم الصف (ع$_3$) فى جدول السمبلكس الثاني:

قيم الصف ع$_3$ الجديدة = قيم الصف ع$_3$ القديمة – (القيم المقابلة لصف س$_1$ الجديدة × رقم تقاطع صف ع$_3$ مع عمود البؤرة)

60 – (60 × 1) = صفر

1 – (1 × 1) = صفر

1 – ($\frac{1}{2}$ × 1) = $\frac{1}{2}$

صفر – ($\frac{1}{2}$ × 1) = – $\frac{1}{2}$

صفر – (صفر × 1) = صفر

1 – (صفر × 1) = 1

∴ قيم (ع$_3$) الجديدة هي: [صفر ، صفر ، $\frac{1}{2}$ ، – $\frac{1}{2}$ ، صفر ، 1]

8- اعداد جدول السمبلكس الثانى:

جدول السمبلكس الثانى

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
م ز			80	70	صفر	صفر	صفر
80	س$_1$	60	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	60	صفر	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	صفر
صفر	ع$_3$	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	صفر	1
	ل ز	480	80	40	40	صفر	صفر
	م ز – ل ز		صفر	30	-40	صفر	صفر

∴ وفى هذا الجدول يلاحظ ان قيمة المتغير الأساسى ع$_3$ = صفر

وهذا مخالف للخاصية الأساسية التى ذكرناها فى الحل الأساسى وهو أن تكون قيم المتغيرات الغير أساسية هى التى تساوى صفر.

ولكن ماذا يحدث إذا قمنا بايجاد جدول السمبلكس الثالث عن طريق إدخال (س$_2$) للحل

∴ تحديد المتغير الذى يترك الحل:

- عند س$_1$: $60 \div \frac{1}{2} = 120$
- عند ع$_2$: $10 \div -\frac{1}{2} = -20$ ← خارج الاختيار
- عند ع$_3$: صفر ÷ $\frac{1}{2}$ = صفر ← يترك الحل

∴ (س$_2$) يحل محل (ع$_3$) ورقم البؤرة هو ($\frac{1}{2}$).

ومع استكمال الحل نصل إلى جدول السمبلكس الثالث كما يلي:

جدول السمبلكس الثالث

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
	م ز		80	70	صفر	صفر	صفر
80	$س_1$	60	1	صفر	1	صفر	1-
صفر	$ع_2$	10	صفر	صفر	1-	1	1
70	$س_2$	صفر	صفر	1	1-	صفر	2
	ل ز	480	80	70	10	صفر	60
	م ز – ل ز		صفر	صفر	10-	صفر	60-

ويتضح من جدول السمبلكس الثالث أن

$س_1$ = 60 ، $ع_2$ = 10 ، $س_2$ = صفر ، $ع_1$ = صفر ، $ع_3$ = صفر

لاحظ أن الربح المحقق فى جدول السمبلكس الثانى = الربح المحقق فى جدول السمبلكس الثالث = 480 جنيه.

ويعنى ذلك أننا نغير الحل دون أن يتغير أو يتحسن رقم الربح ومن هنا إذا حاولنا تحسين الحل الأخير الذى ينتج عن جدول السمبلكس الثالث سوف تجد أننا نعود فى جدول السمبلكس الرابع إلى ذات الحل الذى توصلنا إليه فى جدول السمبلكس الثانى.

وتعرف هذه الخاصية بمشكلة أن نكرر نفس الحلول ونعود إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل.

خصائص مشكلة عدم الانتظام:

1- لا تمثل هذه الخاصية أى مشكلة عند حل المشكلة بالطريقة البيانية.

2- إذا ظهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفرية في عمود قيم متغيرات الحل فى جدول السمبلكس النهائى فإن ذلك لا يمثل أى مشكلة، أما إذا ظهر بقيمة صفرية فى أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائى فإن الحل قد يواجه

مشكلة تكرار نفس الحلول والعودة إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل ولكن فى أحيان كثيرة قد لا تحدث هذه المشكلة.

الخلاصة: إذا حدثت مشكلة عدم الانتظام فإننا يجب أن نرجع إلى المشكلة الأساسية للبرمجة الخطية ونقوم بصياغتها مرة ثانية مع استبعاد القيد الزائد والذى يعتبر غير ضرورى بالنسبة للحل.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن حالة عدم الانتظام تمثل مشكلة حقيقية إذا حدثت قبل الوصول إلى الحل الأمثل. هذا ولحل هذه المشكلة فإن بعض الكتاب والباحثين في بحوث العمليات يقترحوا أنه يفضل اختيار الصف الأعلى من الصفوف المتساوية ليمثل صف المتغير الذى يترك الحل (صف البؤرة).

المشكلة الثالثة: حالة وجود أكثر من حل أمثل:

تظهر هذه الحالة فى ظل استخدام أسلوب السمبلكس فى حالة وجود صفر فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) تحت واحد أو أكثر من المتغيرات غير الأساسية، وذلك مخالف للقاعدة الأساسية التى تدل على أن قيم المتغيرات الأساسية فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) قيم صفرية.

حينما يظهر أحد المتغيرات الغير أساسية بقيمة صفرية فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) فإننا يمكننا إدخال هذا المتغير الغير أساسى إلى الحل ويترتب على ذلك عدم التأثير على:

أ- الربح المحقق زيادة أو نقصاً.

ب- التكلفة المتحققة زيادة أو نقصاً.

وهذا يعنى أنه يمكن تحقيق نفس الربح أو التكلفة بمجموعة جديدة من قيم المتغيرات وذلك يعتبر ميزة لمتخذ القرار حيث تتسع الفرصة أمامه لتحديد توليفة المتغيرات.

مثال (5):

عظم (ر) = $س_1 + 2س_2 + 3س_3$

فى ظل أن:

$س_1 + 2س_2 + 3س_3 \leq 10$

$س_1 + س_2 \leq 5$

$س_1 \leq 1$

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3 \geq$ صفر

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحـل

1- تحويل المتباينات إلى متساويات:

$س_1 + 2س_2 + 3س_3 + ع_1 = 10$

$س_1 + س_2 + ع_2 = 5$

$س_1 + ع_3 = 1$

2- ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

(ر) = $س_1 + 2س_2 + 3س_3$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3$

فى ظل أن:

$س_1 + 2س_2 + 3س_3 + ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3 = 10$

$س_1 + س_2$ + صفر $س_3$ + صفر $ع_1 + ع_2$ + صفر $ع_3 = 5$

$س_1$ + صفر $س_2$ + صفر $س_3$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2 + ع_3 = 1$

3- اعداد جدول الحل المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئي

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
م ز			1	2	3	صفر	صفر	صفر
صفر	ع$_1$	10	1	2	3	1	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	5	1	1	صفر	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	1	1	صفر	صفر	صفر	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز − ل ز		1	2	3	صفر	صفر	صفر

ويمكن اعداد جدول الحل الثانى كما يلى:

جدول السمبلكس الثانى

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
م ز			1	2	3	صفر	صفر	صفر
3	س$_3$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	5	1	1	صفر	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	1	1	صفر	صفر	صفر	صفر	1
	ل ز	10	1	2	3	1	صفر	صفر
	م ز − ل ز		صفر	صفر	صفر	1−	صفر	صفر

لاحظ أن جدول السمبلكس الثانى هو جدول الحل الأمثل وفيه:

س$_3$ = $\frac{10}{3}$ ، ع$_2$ = 5 ، ع$_3$ = 1 ، س$_1$ = صفر ، س$_2$ = صفر،

ع$_1$ = صفر

ولكن يلاحظ أن قيمة المتغيرين الغير أساسيين س$_1$ ، س$_2$ فى الصف الأخير (م ز − ل ز) قيم صفرية، وهذا يعنى أنه يمكن إدخال أحدهما إلى الحل مما يترتب عليه عدم تغيير رقم الربح ولكن الذى سيتغير هو توليفة المنتجات من المتغيرات كما هو موضح فى جدول السمبلكس الثالث.

بإدخال المتغير (س$_1$) إلى الحل و (ع$_3$) يترك الحل

قيم (س$_1$) = قيم ع$_3$ ÷ رقم البؤرة (1)

قيم (س$_1$): [1 ، 1 ، صفر ، صفر ، صفر ، صفر ، 1]

قيم (س$_3$): [3 ، صفر ، $\frac{2}{3}$ ، 1 ، $\frac{1}{3}$ ، صفر ، صفر ، $-\frac{1}{3}$]

قيم (ع$_2$): [4 ، صفر ، 1 ، صفر ، صفر ، 1 ، $-$ 1]

ثم يتم اعداد جدول السمبلكس الثالث هو كما يلى:

جدول السمبلكس الثالث

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
م ز			1	2	3	صفر	صفر	صفر
3	س$_3$	3	صفر	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$
صفر	ع$_2$	4	صفر	1	صفر	صفر	1	1$-$
1	س$_1$	1	1	صفر	صفر	صفر	صفر	1
	ل ز	10	1	2	3	1	صفر	صفر
	م ز – ل ز		صفر	صفر	صفر	1$-$	صفر	صفر

ويلاحظ أن جدول السمبلكس الثالث أيضاً جدول حل أمثل وربح الحل المحقق يساوى ربح الحل المحقق فى جدول السمبلكس الثانى (حل أمثل أيضاً) = (10) جنيه وهذا يعنى وجود أكثر من حل أمثل دون تحسين فى رقم الربح ويعنى ذلك إمكانية تكرار الحل الأمثل دون حدوث أى تغير فى رقم الربح.

ولكن الاختلاف بين الحل الأمثل الأول (جدول السمبلكس الثانى) والحل الأمثل الثاني (جدول السمبلكس الثالث) هو حجم الإنتاج من كل من (س$_1$، س$_2$، س$_3$)، حيث فى الحل الأمثل الأول يتم إنتاج ($\frac{10}{3}$) من (س$_3$)، بينما فى الحل الأمثل الثانى يتم إنتاج : س$_3$ = 3 وحدات، س$_2$ = صفر، س$_1$ = وحدة واحدة.

ويلاحظ فى الحل الأمثل الثاني (جدول السمبلكس الثالث) يوجد المتغير(س$_2$) وهو أحد المتغيرات غير الأساسية قيمته فى الصف الأخير (م ز – ل ز) =

صفر ومعنى ذلك أنه يمكن أن يدخل للحل مرة أخرى دون أن يغير من قيمة الحل النهائى وهى (10) جنيه.

ومن هنا نلاحظ أنه عند الحل الأمثل

فى جدول السمبلكس الثانى ($س_1$) = صفر، ($س_2$) = صفر، ($س_3$) = $\frac{10}{3}$

فى جدول السمبلكس الثانى ($س_1$) =1، ($س_2$) = صفر، ($س_3$) = 3

ومن هنا يلاحظ أنه فى الحلين أنه لم يحدث تغيير في رقم الربح ولكن الذى سيتغير هو توليفة المنتجات.

فى النهاية تجد الإشارة إلي أن وجود أكثر من حل أمثل يعطى الفرصة للإدارة لاختيار تلك التوليفة من المنتجات والتى تتناسب مع ظروف الشركة وموقفها دون أن تضحى بأى قيمة فى الربح أو التكلفة.

المشكلة الرابعة: مشكلة عدم وجود حل ممكن:

تظهر هذه المشكلة إذا تم التوصل إلى الحل الأمثل وكان هناك واحداً أو أكثر من المتغيرات الوهمية (و) ضمن المتغيرات الأساسية وهذا يعنى عدم وجود أى حل ممكن لهذه المشكلة بشرط أن تكون قيمة المتغير الوهمى فى عمود قيم متغيرات الحل موجبة أما إذا ظهرت قيمة المتغير الوهمى بصفر فإن هذه لا تعد حالة عدم إمكانية وجود حل أمثل.

مثال (6):

عظم (ر) = 3 $س_1$ + 2 $س_2$ + 3 $س_3$

فى ظل أن:

2 $س_1$ + $س_2$ + $س_3$ ≥ 2

3 $س_1$ + 4 $س_2$ + 2 $س_3$ ≤ 9

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحل

1- تحويل المتباينات إلى متساويات:

2 س$_1$ + س$_2$ + س$_3$ + ع$_1$ = 2

3 س$_1$ + 4 س$_2$ + 2 س$_3$ − ف$_1$ + و$_1$ = 9

2- ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

(ر) = 3 س$_1$ + 2 س$_2$ + 3 س$_3$ + صفر ع$_1$ + صفر ف$_1$ − م و$_1$

فى ظل أن:

2 س$_1$ + س$_2$+ س$_3$ + ع$_1$ + صفر ف$_1$ + صفر و$_1$ = 2

3 س$_1$ + 4 س$_2$ + 2 س$_3$ + صفر ع$_1$ − ف$_1$ + و$_1$ = 9

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

م ر			3	2	3	صفر	صفر	− م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ف$_1$	و$_1$
صفر	ع$_1$	2	2	1	1	1	صفر	صفر
− م	و$_1$	9	3	4	2	صفر	1−	1
	ل ر	−9 م	−3 م	−4 م	−2 م	صفر	م	− م
م ر − ل ر			3+3 م	2+4 م	3+2 م	صفر	− م	صفر

ويلاحظ من الحل السابق أن المتغير الذى سيدخل للحل الجديد (صاحب أكبر قيمة موجبة) وهو المتغير (س$_2$).

المتغير الذى يترك الحل هو المتغير (ع$_1$) صاحب أقل ناتج قسمة موجب

∴ قيم (س$_2$) الجديدة: قسمة قيم ع$_1$ ÷ رقم البؤرة (1)

= [2 ، 2 ، 1 ، 1 ، 1 ، صفر ، صفر].

∴ قيم (و$_1$): = [1 ، − 5 ، صفر ، − 2 ، − 4 ، − 1 ، 1].

جدول السمبلكس الثانى

م ز			3	2	3	صفر	صفر	– م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_{1}$	س$_{2}$	س$_{3}$	ع$_{1}$	ف$_{1}$	و$_{1}$
2	س$_{2}$	2	2	1	1	1	صفر	صفر
– م	و$_{1}$	1	–5	صفر	– 2	–4	–1	1
	ل ز	–4 م	5+4 م	2	2+2 م	2+4 م	م	– م
	م ز – ل ز		–1–5 م	صفر	1–2م	–2–4 م	– م	صفر

ويلاحظ من جدول السمبلكس الثانى أننا توصلنا إلى الحل الأمثل لأن كل القيم صفرية أو سالبة فى الصف الأخير (م ز – ل ز)، ولكن يلاحظ وجود المتغير الوهمى (و$_{1}$) فى الحل الأمثل وله قيمة موجبة قدرها (1) وهذا أمر يشير إلى مواجهة مشكلة عدم وجود حل ممكن. ويطلق على الحل الذى توصلنا إليه بالحل (المثالى المسبق).

المشكلة الخامسة: مشكلة الحل غير المحدد(عدم وجود منطقة حلول ممكنة):

تظهر هذه المشكلة عند تحديد المتغير الذى يترك الحل وذلك بقسمة قيم متغيرات الحل على المعاملات الموجبة فى عمود البؤرة والذى يحدث أحياناً أنه لا توجد قيم موجبة فى عمود البؤرة بمعنى أن كل القيم إما صفرية أو سالبة وفى هذا الحالة تعتبر المشكلة غير محدودة.

السبب فى ظهور هذه المشكلة هو ما يلى:

1– قيام الشخص الذى يبنى النموذج باستبعاد بعض القيود غير المتكررة وعدم أخذها فى الحسبان.

2– أن معاملات المتغيرات (أو بعضها) والتى توجد فى معادلات القيود لم يتم تقديرها بدرجة صحيحة.

لاحظ أن هذه المشكلة ليس من الضرورى إدراكها مع بداية الحل باستخدام أسلوب السمبلكس ولكن قد تظهر لنا هذه المشكلة فى إحدى المراحل المتقدمة من الحل.

مثال (7):

عظم (ر) = 20 $س_1$ + 10 $س_2$ + $س_3$

فى ظل أن:

3 $س_1$ − 3 $س_2$ + 5 $س_3$ ≥ 50

$س_1$ + $س_3$ ≥ 10

$س_1$ − $س_2$ + 4 $س_3$ ≥ 20

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحل

1− تحويل المتباينات إلى متساويات:

3 $س_1$ + 3 $س_2$ + 5 $س_3$ + $ع_1$ = **50**

$س_1$ + $س_3$ + $ع_2$ = 10

$س_1$ − $س_2$ + 4 $س_3$ + $ع_3$ = 20

2− ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

(ر) = 20 $س_1$ + 10 $س_2$ + $س_3$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3$

فى ظل أن:

3 $س_1$ + 3 $س_2$ + 5 $س_3$ + $ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3$ = 50

$س_1$ + صفر $س_2$ + $س_3$ + صفر $ع_1$ + $ع_2$ + صفر $ع_3$ = 10

$س_1$ − $س_2$ + 4 $س_3$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$ + $ع_3$ = 20

3− اعداد جدول السمبلكس المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

م ز			20	10	1	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
صفر	ع$_1$	50	3	3−	5	1	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	10	1	صفر	1	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	20	1	1−	4	صفر	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز – ل ز		20	10	1	صفر	صفر	صفر

لاحظ أن (س$_1$) يدخل الحل ويحل محل (ع$_2$) الذى يترك الحل

∴ قيم (س$_1$) الجديدة هي: [10 ، 1 ، صفر ، 1 ، صفر ، 1 ، صفر]

∴ قيم (ع$_1$) الجديدة هي: [20 ، صفر ، − 3 ، 2 ، 1 ، − 3 ، صفر]

∴ قيم (ع$_3$) الجديدة هي: [10 ، صفر ، − 1 ، 3 ، صفر ، − 1 ، 1]

اعداد جدول السمبلكس الثانى:

جدول السمبلكس الثانى

م ز			20	10	1	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
صفر	ع$_1$	20	صفر	3−	2	1	3−	صفر
20	س$_1$	10	1	صفر	1	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	10	صفر	1−	3	صفر	1−	1
	ل ز	200	20	صفر	20	صفر	20	صفر
	م ز – ل ز		صفر	10	19−	صفر	20−	صفر

من الواضح أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل ويجب إدخال المتغير (س$_2$) إلى الحل، وعند محاولة تحديد المتغير الذى يترك الحل نجد أنه ليست هناك قيم موجبة فى العمود (س$_2$) وبالتالى لا يمكن إجراء عملية القسمة وبالتالى فالمشكلة بلا حدود. حيث يلاحظ **أن** قيمة المتغير

($س_2$) فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) قيمة موجبة (10)، وذلك أن دالة الهدف تصبح دالة غير محدودة.

أسعار الظل:

يقود تفسير محتوى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الباحثين والدارسين إلى التعرف على اصطلاح "سعر الظل" أو ما يطلق عليه أيضاً السعر المحاسبى أو السعر الداخلى أو خسارة الفرصة البديلة لإنتاج المنتج ومعدلات الإحلال الحدية.

ويمكن تعريف سعر الظل لمورد نادر معين بأنه مقدار الزيادة (أو النقص) فى قيمة دالة الهدف الناتج عن زيادة أو نقص الكمية المتاحة من هذا المورد بمقدار وحدة واحدة فقط بحيث يترتب على ذلك زيادة الربح المتحقق بمقدار معين. ويطلق على هذه الزيادة فى الربح والحاصلة نتيجة الحصول على وحدة اضافية من ذلك المورد إصطلاح "سعر ظل المورد".

هذا كما يمكن القول بصفة عامة أنه يوجد لكل مورد من الموارد المتاحة سعر ظل واحد وذلك إذا ما تم زيادة هذا المورد أو تخفيضة بوحدة واحدة، إلا فى حالة مشكلة عدم الإنتظام (السابق الإشارة إليها) فإنه يوجد للمورد الواحد سعران أحدهما فى حالة تخفيض المورد بوحدة واحدة، والأخر فى حالة زيادة المورد بوحدة واحدة أيضاً.

وتوجد طريقتان أساسيتان يمكن استخدامهما فى الحصول على أسعار الظل تتمثل فيما يلى:

1- الحصول على أسعار الظل مباشرة من الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) فى جدول السمبلكس النهائى (جدول الحل الأمثل) تحت الأعمدة التى تتضمن المتغيرات العاطلة ($ع_1$ ، $ع_2$ ،......) من واقع الحل الأصلى للمشكلة.

2- الحصول على أسعار الظل من خلال تحويل المشكلة الأصلية لنموذج البرمجة الخطية Primal Problem إلى نموذج يعطى أسعار الظل

مباشرة يطلق عليه اصطلاح المشكلة الثنائية أو المزدوجة Dual Problem.(وسوف يتم تناول تلك المشكلة فى الفصل القادم).

ومن أجل فهم كيفية الحصول على أسعار الظل مباشرة من الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) فى جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية دعنا نأخذ المثال التالى:

مثال (8):

عظم (ر) = 6 $س_1$ + 4 $س_2$

فى ظل أن:

الآلة الأولى: 2 $س_1$ + $س_2$ ≥ 20 ساعة عمل

الآلة الثانية: $س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 16 ساعة عمل

$س_1$، $س_2$ ≤ صفر

وقد كان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة هو:

جدول السمبلكس النهائى (الأمثل)

			6	4	صفر	صفر
$م_ز$			6	4	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
6	$س_1$	8	1	صفر	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
4	$س_2$	4	صفر	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$ل_ز$	64	6	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$
$م_ز - ل_ز$			صفر	صفر	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

من فحص الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) فى جدول الحل الأمثل يتضح ما يلى:

1- المتغيرات الأساسية ($س_1$ ، $س_2$) يكون معاملها (صفر) فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$).

2- المزيج الإنتاجى الأمثل يتكون من إنتاج (8) وحدات من ($س_1$) ، و(4) من ($س_2$).

3- أسعار الظل هما الرقمان ($\frac{8}{3}$) ، ($\frac{2}{3}$) ، وهما الرقمان تحت عمودى المتغيرين العاطلين ($ع_1$) ، ($ع_2$).

وكل رقم من هذين الرقمين يقابل قيداً من قيود المشكلة، حيث يقابل الرقم ($\frac{8}{3}$) القيد الأول، بينما يقابل الرقم الثانى ($\frac{2}{3}$) القيد الثانى .

4- حيث أن ($ع_1$) تخص القيد الأول والذى كانت طاقته الإنتاجية (20) فإذا تم زيادتها بمقدار ساعة واحدة فإن أثر ذلك يتضح من دراسة عمود ($ع_1$) بجدول الحل الأمثل، حيث يتبين أن زيادة طاقة القيد الأول (الطرف الأيسر من القيد) بمقدار وحدة واحدة (ساعة واحدة) يترتب عليه ما يلى:

أ- زيادة الكمية المنتجة من ($س_1$) بمقدار ($\frac{2}{3}$) ، وتخفيض الكمية المنتجة من ($س_2$) بمقدار ($\frac{1}{3}$).

ب- تأثير تلك التعديلات على الربح يكون كما يلى:

الزيادة فى الربح الناتجة عن إنتاج ($\frac{2}{3}$) وحدة إضافية من ($س_1$)

$$= 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

النقص فى الربح الناتج عن نقص إنتاج ($س_2$) بمقدار ($\frac{1}{3}$) وحدة يساوى

$$4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

∴ الزيادة الصافية فى الربح الناتجة عن استخدام ساعة إضافية من المورد الأول $= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

وتعادل تلك الزيادة الصافية سعر الظل للمورد الأول والتى تساوى ($\frac{8}{3}$).

5- حيث أن ($ع_2$) تخص القيد الثانى والذى كانت طاقته الإنتاجية (16) فإذا تم زيادتها بمقدار ساعة واحدة، فإن أثر ذلك أن زيادة طاقة القيد الثانى (الطرف الأيسر من القيد) بمقدار وحدة واحدة (ساعة واحدة) يترتب عليه ما يلى:

أ- انخفاض الكمية المنتجة من ($س_1$) بمقدار ($\frac{1}{3}$) ، وزيادة الكمية المنتجة من ($س_2$) بمقدار ($\frac{2}{3}$) .

ب- تأثير تلك التعديلات على الربح يكون كما يلى:

الانخفاض فى الربح الناتج عن نقص إنتاج ($س_1$) بمقدار ($\frac{1}{3}$)

$$= 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

الزيادة فى الربح الناتجة عن إنتاج ($\frac{2}{3}$) وحدة إضافية من ($س_2$)

$$= 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

الزيادة الصافية فى الربح الناتجة عن استخدام ساعة إضافية من المورد الثانى

$$= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

وتعادل تلك الزيادة الصافية سعر الظل للمورد الثانى والتى تساوى ($\frac{2}{3}$).

ملاحظات هامة عند استخدام سعر الظل فى عملية اتخاذ القرارات:

1- عن طريق مقارنة أسعار الظل لكل من الموارد المتاحة يمكن تحديد أولويات الإنفاق. حيث يجب زيادة المتاح من المورد الذى يساهم بشكل أكبر فى زيادة الربح الصافى أى فى تحقيق الأرباح للمنظمة.

2- سعر الظل يمثل التكلفة الإقتصادية لمورد ما والتى يمكن التضحية بها لإنتاج وحدة واحدة من المنتج.

3- إذا كان متغير العطل (ع) ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل فإن سعر الظل لهذا المتغير لابد وأن يكون يساوي صفراً. ويرجع

ذلك إلى أن وجود قيمة موجبة للمتغير (ع) تدل على وجود فائض من هذا المورد، وبالتالى ليس هناك داعى لشراء أى وحدة اضافية منه فى هذه المرحلة ويعنى ذلك أن قيمة الوحدة الإضافية للمنظمة تساوى صفر.

4- إذا كان متغير العطل (ع) ضمن المتغيرات الغير أساسية فى جدول الحل الأمثل فإن قيمته تساوى صفر وسعر الظل له يكون رقماً موجباً معبراً عنه برقماً سالباً مساوياً له فى الصف الأخير (م ز – ل ز). ويرجع ذلك إلى أنه قد تم استخدام هذا المورد تماماً (أى هو مورد نادر) وأصبح هو العامل الحاكم فى رقم الإنتاج وأى زيادة فيه يترتب عليها زيادة الإنتاج وتحقيق أرباح أعلى.

مثال (9):

فى المثال السابق (رقم 8) إذا عرض أحد الموردين على المنظمة تشغيل الآلة الأولى لمدة ساعة مقابل ثلاثة جنيهات، وتشغيل الآلة الثانية مقابل نصف جنيه للساعة، فهل يجب أن تقبل المنظمة هذا العرض أم لا ولماذا؟

الحل

1- نحدد أولاً سعر الظل لكل من الآلة الأولى و الآلة الثانية:

سعر الظل للآلة الأولى = ($\frac{8}{3}$) ، وسعر الظل للألة الثانية = ($\frac{2}{3}$).

2- القرار: تقبل المنظمة عرض المورد بتشغيل الآلة الأولى مقابل ثلاثة جنيهات للساعة الواحدة وذلك لأن الزيادة الصافية فى الربح مقابل تشغيل الآلة الأولى ساعة واحدة = ($2\frac{2}{3}$) أى أقل من عرض المورد.

أما بالنسبة للآلة الثانية فإن المنظمة ترفض عرض المورد بتشغيل الآلة الثانية ساعة واحدة مقابل نصف جنيه حيث أن الزيادة الصافية فى الربح مقابل تشغيل الآلة الثانية ساعة واحدة = ($\frac{2}{3}$) وهى أكبر من عرض المورد.

تمارين علي الفصل الثالث

تمرين (1): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

عظم (ر) = 8 $س_1$ + 6 $س_2$

فى ظل أن:

4 $س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 60

2 $س_1$ +4 $س_2$ ≥ 48

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

تمرين (2): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

عظم (ر) = 3 $س_1$ + $س_2$ + 3 $س_3$

فى ظل أن:

2 $س_1$ + $س_2$ + $س_3$ ≥ 2

$س_1$ + 2 $س_2$ + 3 $س_3$ ≥ 5

2 $س_1$ + 2 $س_2$ + $س_3$ ≥ 6

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

تمرين (3): المطلوب حل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

تدنية (ت) = 3 $س_1$ + 8 $س_2$

فى ظل أن:

$س_1$+ $س_2$ = 200

$س_1$ ≥ 80

$س_2$ ≤ 60

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

تمرين (4): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

تدنية (ت) = 80 $س_1$ + 60 $س_2$

فى ظل أن:

$2س_1 + 3س_2 \geq 50$

$4س_1 + س_2 \geq 120$

$س_1 ، س_2 \geq$ صفر

تمرين (5): قيم حل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

تدنية (ت) = $5س_1 + 7س_2$

فى ظل أن:

$س_1 + 2س_2 = 50$

$س_1 \geq 20$

$س_2 \leq 20$

$س_1 ، س_2 \geq$ صفر

تمرين (6): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

عظم (ر) = $10س_1 + 9س_2$

فى ظل أن:

$5س_1 + 4س_2 \leq 120$

$2س_1 + 4س_2 \leq 60$

$س_1 ، س_2 \geq$ صفر

تمرين (7): هل يمكنك حل هذه المشكلة المعبر عنها فى شكل نموذج للبرمجة الخطية باستخدام أسلوب السمبلكس؟

تدينة (ت) = $2س_1 + 8س_2$

فى ظل القيود:

$5س_1 + 10س_2 = 150$

$س_1 \leq 20$

$س_2 \geq 14$

$س_1 ، س_2 \geq$ صفر

تمرين (8): إذا كانت المتباينات التالية تمثل متباينات قيود أحد نماذج البرمجة الخطية:

$س_1 + س_2 + س_3 = 7$

$2 س_1 - 5 س_2 + س_3 \leq 10$

$س_1 ، س_2 ، س_3 \leq$ صفر

قم بتحديد الحل الأمثل للنموذج إذا كانت دالة الهدف له كما يلى:

(أ) عظم (ر) $= 2 س_1 + 3 س_2 - 5 س_3$

(ب) تدنية (ت) $= 2 س_1 + 3 س_2 - 5 س_3$

تمرين (9): أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باستخدام أسلوب السمبلكس:

تدنية (ت) $= 3 س_1 + 5 س_2$

فى ظل أن:

$20 س_1 + 10 س_2 \leq 200$

$س_1 \geq 20$

$س_1 + س_2 = 16$

$س_1 ، س_2 \leq$ صفر

تمرين (10): يمثل النموذج التالى نموذجاً للبرمجة الخطية:

عظم (ر) $= 3 س_1 + 2 س_2 + 3 س_3$

فى ظل أن:

$2 س_1 + س_2 + س_3 \geq 2$

$3 س_1 + 4 س_2 + 2 س_3 \leq 8$

$س_1 ، س_2 ، س_3 \leq$ صفر

المطلوب: هل يوجد لهذا النموذج حلاً ممكناً باستخدام أسلوب السمبلكس؟ ولماذا؟

تمرين (11) : فيما يلي جدول السمبلكس لشركة " بالهناء "للمواد الغذائية :

			2	1	صفر	صفر	– م
	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ف$_1$	و$_1$
	ع$_1$	2	2			1	1–
	س$_2$	2	$\frac{1}{2}$			– $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

المطلوب:

1– هل تعتقد أن الجدول السابق هو لمشكلة تعظيم ربح أم تدنية تكاليف ؟ ولماذا ؟

2– ما هو ترتيب هذا الجدول ؟ حدد مبررات إجابتك ؟

3– استكمال الجدول السابق.

4– هل تعتقد أن الجدول السابق بعد استكماله هو جدول الحل الأمثل ؟

أ– إذا كانت إجابتك ب (نعم) فما هو الحل الأمثل؟

ب– إذا كانت إجابتك ب (لا) قم باستكمال الحل حتي تصل إلي الحل الأمثل.

تمرين (12): فيما يلي جدول السمبلكس لشركة " ريماس" للمواد الغذائية:

			3	8	م	صفر	م	صفر
	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	و$_1$	ع$_1$	و$_2$	ف$_1$
	و$_1$	140	1				1–	1
	ع$_1$	80	1				صفر	صفر
	س$_2$	60	صفر				1	– 1

المطلوب:

1- هل تعتقد أن الجدول السابق هو لمشكلة تعظيم ربح أم تدنية تكاليف ؟ ولماذا ؟

2- ما هو ترتيب هذا الجدول ؟ حدد مبررات إجابتك ؟

3- كم عدد قيود المشكلة الأصلية؟

4- استكمال الجدول السابق.

5- اعداد جدول الحل التالي لهذا الجدول "موضحاً خطوات الحل بالتفصيل.

الفصل الرابع
الصياغة الثنائية لنموذج
البرمجة الخطية

- مقدمة.
- فوائد استخدام النموذج الثنائى أو المقابل فى حل مشاكل البرمجة الخطية.
- القواعد التى يمكن إتباعها عند تحويل الصيغة الأصلية لنموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة الثنائية.
- أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس أو أسلوب مقابل السمبلكس.
- تمارين للتدريب.

الصياغة الثنائية لنموذج البرمجة الخطية

مقدمة:

تنقسم مشكلات البرمجة الخطية إلى جزأين متقابلين، حيث يمكن القول أن مشكلة تعظيم الربح يقابلها مشكلة تدنية التكاليف وأن مشكلة تدنية التكاليف يقابلها أيضاً مشكلة تعظيم الربح.

ويطلق على هذه المشكلة فى هذه الحالة المشكلة الثنائية أو المشكلة المقابلة أو المشكلة الإزدواجية، ويعنى ذلك أن لفظ الثنائية يعنى أن أى مشكلة برمجة خطية يمكن صياغتها رياضياً بطريقتين وهما: الطريقة المعتادة التى ذكرناها فى الأجزاء السابقة ويطلق عليها الصياغة الأولية أو الأصلية، والطريقة الثانية تمثل الوجه الأخر للصياغة الأولية ويطلق عليها مشكلة الصياغة الثنائية.

ويعنى ذلك أيضاً أن يوجد نموذج مقابل Dual Model لكل نموذج أولى Primal Model من نماذج البرمجة الخطية، وأن الحل الأمثل للنموذج المقابل ينطبق تماماً مع الحل الأمثل للنموذج الأولى.

فوائد استخدام النموذج الثنائى أو المقابل فى حل مشاكل البرمجة الخطية:

توجد العديد من الفوائد التى تدعوا إلى استخدام النموذج الثنائى أو المقابل فى حل مشاكل البرمجة الخطية ومنها:

1- سرعة وسهولة الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلات البرمجة الخطية، حيث تستلزم مشكلة الثنائية عند حلها خطوات رياضية أقل تعقيداً من الخطوات اللازمة لحل المشكلة فى صيغتها الأولية أو الأصلية.

2- استخدام النموذج الثنائى يساعد المديرين على تقييم بدائل حل المشكلات وتحديد قيمة كل بديل.

3- يعتبر النموذج الثنائى هام جداً فى التحليل المتقدم لمدى حساسية الحل الأمثل لأى تغييرات فى البيانات التى تبنى على أساسها نموذج البرمجة الخطية.

4- يمثل النموذج الثنائى بداية لدراسة وتحليل أسعار الظل التى توفر للمديرين معلومات خاصة عن الموارد المتاحة.

5- يقدم النموذج الثنائى بيانات ذات أهمية عند عمل التحليل الاقتصادى لمشكلة البرمجة الخطية.

وتحتوى الصياغة الثنائية لنموذج البرمجة الخطية على نفس المكونات الأساسية التى يحتويها الشكل أو الصياغة الأصلية للمشكلة، فهى تحتوى على دالة الهدف وعلى مجموعة من القيود.

القواعد التى يمكن إتباعها عند تحويل الصيغة الأصلية لنموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة الثنائية:

عند تحويل النموذج الأصلى للبرمجة الخطية إلى نموذج مقابل أو ثنائى فإنه يجب إتباع مجموعة من القواعد التالية:

1- إذا كانت دالة الهدف فى النموذج الأصلى هى دالة تعظيم الربح. فإنه يتم تحويلها فى النموذج الثنائى لتصبح دالة تدنيه التكاليف. وإذا كانت دالة الهدف فى النموذج الأصلى هى دالة تدنية التكاليف فإنه يتم تحويلها فى النموذج الثنائى لتصبح دالة تعظيم الربح أى تعظيم كفاءة استخدام الموارد المتاحة.

2- تمثل معاملات دالة الهدف فى المشكلة الأصلية الجانب الأيسر للقيود فى المشكلة الثنائية.

3- القيم الموجودة بالجانب الأيسر من معاملات القيود فى المشكلة الأصلية تصبح هى المعاملات الخاصة بدالة الهدف فى المشكلة الثنائية.

4- تمثل معاملات المتغير الأول فى قيود المشكلة الأصلية معاملات القيد الأول فى المشكلة الثنائية، كما تمثل معاملات المتغير الثانى فى قيود المشكلة الأصلية معاملات القيد الثانى فى المشكلة الثنائية ... وهكذا... .

5- عدد المتغيرات فى الصياغة الثنائية يساوى عدد معادلات القيود الموجودة فى الصياغة الأصلية.

6- تتغير إشارة المتباينة (≥) فى المشكلة الأصلية إلى إشارة المتباينة (≤) فى المشكلة الثنائية، أى أن إشارات المتباينات فى الصيغة الأصلية تصبح فى الصيغة الثنائية (≤) فى حالة التدنية، (≥) فى حالة التعظيم.

7- يتم إضافة شرط عدم السالبية إلى المتغيرات الجديدة.

ونتناول الآن بعض الأمثلة لتطبيق القواعد السابقة:

مثال(1):

إذا توفر لديك النموذج الرياضى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية.

عظم (ر) = 40 $س_1$ +50 $س_2$

فى ظل:

3 $س_1$ + 3 $س_2$ ≥ 90

3 $س_1$ + 4 $س_2$ ≥ 80

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

الحـــل

إن النموذج السابق يعبر عن الصياغة الأصلية للمشكلة دعنا الأن باستخدام القواعد السابقة نحول هذه الصياغة الأصلية إلى الصياغة الثنائية كما يلى:

1- وفقاً للقاعدة رقم (1) فإن دالة الهدف فى الصياغة الثنائية هى دالة تدنية التكاليف نظراً لأن دالة الهدف فى الصياغة الأصلية هى دالة تعظيم الربح.

2- وفقاً للقاعدة رقم (2) تمثل معاملات دالة الهدف فى المشكلة الأصلية وهى (40 ، 50) الجانب الأيسر للقيود فى المشكلة الثنائية.

3- وفقاً للقاعدة رقم (3) فإن القيم الموجودة بالجانب الأيسر من معادلات القيود فى المشكلة الأصلية وهى (90، 80) تصبح هى معاملات دالة الهدف فى المشكلة الثنائية.

4- وفقاً للقاعدة رقم (4) تمثل معاملات المتغير الأول (س$_1$) وهى (3 ، 3) فى قيود المشكلة الأصلية معاملات القيد الأول (3 ص$_1$ + 3 ص$_2$) فى المشكلة الثنائية ..... وهكذا.

5- وفقاً للقاعدة رقم (5) فإن عدد معادلات القيود فى المشكلة الأصلية يساوى (2) هو نفسه عدد المتغيرات (ص$_1$ ، ص$_2$) فى المشكلة الثنائية.

6-وفقاً للقاعدة رقم (6) فإن إشارة المتباينات فى المشكلة الأصلية (≤) تتحول إلى (≥) فى المشكلة الثنائية.

ومن خلال ما تقدم يمكن اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق كما يلى:

تدنية (ت) = 90 ص$_1$ + 80 ص$_2$

فى ظل:

3 ص$_1$ + 3 ص$_2$ ≥ 40

3 ص$_1$ + 4 ص$_2$ ≥ 50

ص$_1$ ، ص$_2$ ≥ صفر

مثال(2):

إذا توفر لديك النموذج الرياضى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

عظم (ر) = 5 س$_1$ + 12 س$_2$ + 4 س$_3$

فى ظل:

س$_1$ + 2 س$_2$ + س$_3$ ≤ 10

2 س$_1$ – س$_2$ + 3 س$_3$ = 8

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ≤ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

الحـــل

تدنية (ت) = 10 ص$_1$ + 8 ص$_2$

فى ظل:

ص$_1$ + 2 ص$_2$ ≤ 5

2 ص$_1$ − ص$_2$ ≤ 12

ص$_1$ + 3 ص$_2$ ≤ 4

ص$_1$ ، ص$_2$ ≤ صفر

مثال(3):

إذا توفر لديك النموذج الرياضى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

تدنية (ت) = 10 س$_1$ − 6 س$_2$

فى ظل:

−2 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ −6

2 س$_1$ + 3 س$_2$ ≥ 5

س$_1$ ، س$_2$ ≤ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق

الحـــل

أولاً يجب ضرب القيد الأول فى (−1) لتحويل القيمة السالبة فى الجانب الأيسر إلى قيمة موجبة مع تغيير إشارة المتباينة من (≤) إلى (≥)

−2 س$_1$ + 2 س$_2$ ≤ −6 بالضرب فى (−1) مع تغيير إشارة المتباينة يصبح القيد الجديد كما يلى:

2 س$_1$ – 2 س$_2$ ≥ 6

ويكون النموذج الثنائى كما يلى:

عظم (ر) = 6 ص$_1$ + 5 ص$_2$

فى ظل:

2 ص$_1$ + 2 ص$_2$ ≥ 10

–2 ص$_1$ + 3 ص$_2$ ≥ –6

ص$_1$ ، ص$_2$ ≤ صفر

مثال(4):

قم بكتابة الصيغة الثنائية لمشكلة البرجة الخطية التالية:

عظم (ر) = – 5 س$_1$ + 2 س$_2$

فى ظل:

– س$_1$ + س$_2$ ≥ –3

2 س$_1$ + 3 س$_2$ ≥ 5

س$_1$، س$_2$ ≤ صفر

الحـــل

*يجب ضرب القيد الأول فى (–1) لتحويل القيمة السالبة فى الجانب الأيسر من القيد إلى قيمة موجبة مع تغيير إشارة المتباينة من (≥) إلى (≤)

– س$_1$ + س$_2$ ≥ –3 بالضرب فى (–1) مع تغيير إشارة المتباينة يصبح القيد الجديد:

س$_1$ – س$_2$ ≤ 3

وتكون الصيغة الثنائية كما يلى:

تدنية (ت) = 3 ص$_1$ + 5 ص$_2$

فى ظل:

ص$_1$ + 2 ص$_2$ ≥ − 5

− ص$_1$ + 3 ص$_2$ ≥ 2

ص$_1$ ، ص$_2$ ≥ صفر

مثال(5):

إذا توفر لديك النموذج الأصلى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

عظم (ر) = 11 س$_1$ + 6 س$_2$ + 2 س$_3$

فى ظل:

5 س$_1$ + 3 س$_2$ + 7 س$_3$ ≤ 2100

4 س$_1$ + 2 س$_2$ + 5 س$_3$ ≤ 1600

3 س$_1$ +2 س$_2$ + 4 س$_3$ ≤ 1700

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ≥ صفر

المطلوب:

1- اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

2- قارن بين نتائج حل كل من النموذج الأصلى والنموذج الثنائى وذلك باستخدام أسلوب السمبلكس.

3- تحديد أسعار الظل باستخدام كل من النموذج الأصلى والنموذج الثنائى للمشكلة السابقة.

الحـــل

1- اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق:

دالة الهدف تدنية (ت) = 2100 ص$_1$ + 1600 ص$_2$ +1700 ص$_3$

فى ظل:

5 ص$_1$ + 4 ص$_2$ + 3 ص$_3$ ≥ 11

3 ص$_1$ + 2 ص$_2$ + 2 ص$_3$ ≤ 6

7 ص$_1$ + 5 ص$_2$ + 4 ص$_3$ ≤ 2

ص$_1$ ، ص$_2$ ، ص$_3$ ≤ صفر

2- حل النموذج الأصلى باستخدام أسلوب السمبلكس:

أ- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) عن طريق إضافة المتغيرات العاطلة (ع):

5 س$_1$ + 3 س$_2$ + 7 س$_3$ + ع$_1$ = 2100

4 س$_1$ + 2 س$_2$ + 5 س$_3$ + ع$_2$ = 1600

3 س$_1$ + 2 س$_2$ +4 س$_3$ + ع$_3$ = 1700

ب- إيجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

دالة الهدف عظم (ر) = 11 س$_1$ + 6 س$_2$ + 2 س$_3$ + صفر ع$_1$ + صفر ع$_2$ + صفر ع$_3$

فى ظل:

5 س$_1$ + 3 س$_2$ + 7 س$_3$ + ع$_1$ + صفر ع$_2$ + صفر ع$_3$ = 2100

4 س$_1$ + 2 س$_2$ + 5 س$_3$ + صفر ع$_1$ + ع$_2$ + صفر ع$_3$ = 1600

3 س$_1$ + 2 س$_2$ + 4 س$_3$ + صفر ع$_1$ + صفر ع$_2$ + ع$_3$ = 1700

حـ- إعداد جدول السمبلكس المبدئى للنموذج الأصلى:

جدول السمبلكس المبدئى للنموذج الأصلى

م ز			11	6	2	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
صفر	ع$_1$	2100	5	3	7	1	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	1600	4	2	5	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	1700	3	2	4	صفر	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز – ل ز		11	6	2	صفر	صفر	صفر

د- وبعد استكمال الحل نصل إلى الحل الأمثل الحالى عند جدول السمبلكس الثالث:

جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلى

م ز			11	6	2	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
6	س$_2$	200	صفر	1	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	صفر
11	س$_1$	300	1	صفر	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{3}{2}$	صفر
صفر	ع$_3$	400	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{1}{2}$	1
	ل ز	4500	11	6	$\frac{29}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	صفر
	م ز – ل ز		صفر	صفر	$-\frac{25}{2}$	1-	$-\frac{3}{2}$	صفر

يتضح من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلى ما يلى:

- يتمثل الحل الأمثل فى:

س$_1$ = 300 وحدة ، س$_2$ = 200 وحدة

س$_3$ = صفر ، ع$_1$ = صفر

ع$_2$ = صفر ، ع$_3$ = 400 وحدة

قيمة ربح الحل = 4500 جنية

- سعر ظل المورد الأول = (1) جنيه
- سعر ظل المورد الثانى = ($\frac{3}{2}$) جنيه
- سعر ظل المورد الثالث = صفر ، حيث يتبين من الحل الأمثل أنه لم يتم إنتاج أى وحدات من المنتج ($س_3$).

وتفسير ذلك يتم من خلال استخدام أسعار ظل الموارد المختلفة حيث أنه إذا تم تقييم الموارد اللازمة لتصنيع الوحدة من المنتج ($س_3$) بأسعار الظل، ومقارنة النتيجة مع عائد مساهمة الوحدة من المنتج ($س_3$)، يتضح أن قيمة الموارد اللازمة مقومة بأسعار الظل أكبر من عائد مساهمة الوحدة من المنتج ($س_3$) كما يتضح فيما يلى:

(7 وحدات من المورد الأول × (1) سعر ظل المورد الأول) = 7 جنيه

(5 وحدة من المورد الثانى × ($\frac{3}{2}$) سعر ظل المورد الثانى) = 7.5 جنيه

(4 وحدات من المورد الثالث × (صفر) سعر ظل المورد الثالث = صفر جنيه

∴ قيمة الموارد اللازمة من الموارد الثلاثة مقومة بأسعار الظل لتصنيع وحدة واحدة من ($س_3$) = 14.5 جنية. فى حين أن عائد مساهمة الوحدة من المنتج ($س_3$) = (2) جنيه.

∴ الفرق بين الموارد مقومة بسعر الظل وعائد مساهمة الوحدة من المنتج ($س_3$) = 12.5 جنيه (تمثل خسارة الفرصة البديلة).

3- حل النموذج الثنائى باستخدام أسلوب السمبلكس:

أ- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) بإضافة متغيرات وهمية وطرح متغيرات فائضة:

$$5\,ص_1 + 4\,ص_2 + 3\,ص_3 - ف_1 + و_1 = 11$$

$$3\,ص_1 + 2\,ص_2 + 2\,ص_3 - ف_2 + و_2 = 6$$

$$7\,ص_1 + 5\,ص_2 + 4\,ص_3 - ف_3 + و_3 = 2$$

ب- إيجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف:

دالة الهدف: (ت) = 2100 ص$_1$ + 1600 ص$_2$ + 1700 ص$_3$ + صفر ف$_1$

+ صفر ف$_2$ + صفر ف$_3$ + م و$_1$ + م و$_2$ + م و$_3$

فى ظل :

5 ص$_1$ + 4 ص$_2$ + 3 ص$_3$ – ف$_1$ + صفر ف$_2$ + صفر ف$_3$ + و$_1$

+ صفر و$_2$ + صفر و$_3$ = 11

3 ص$_1$ + 2 ص$_2$ + 2 ص$_3$ + صفر ف$_1$ – ف$_2$ + صفر ف$_3$ + صفر و$_1$

+ و$_2$ + صفر و$_3$ = 6

7 ص$_1$ + 5 ص$_2$ + 4 ص$_3$ + صفر ف$_1$ + صفر ف$_2$ – ف$_3$ + صفر و$_1$

+ صفر و$_2$ + و$_3$ = 2

جـ- اعداد جدول السمبلكس المبدئى للنموذج الثنائى:

جدول السمبلكس المبدئى للنموذج الثنائى

م ز			2100	1600	1700	صفر	صفر	صفر	م	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ف$_1$	ف$_2$	ف$_3$	و$_1$	و$_2$	و$_3$
م	و$_1$	11	5	4	3	1-	صفر	صفر	1	صفر	صفر
م	و$_2$	6	3	2	2	صفر	1-	صفر	صفر	1	صفر
م	و$_3$	2	7	5	4	صفر	صفر	1-	صفر	صفر	1
	ل ز	19 م	15 م	11 م	9 م	- م	- م	- م	م	م	م
م ز – ل ز			2100 - 15م	1600- 11م	1700- 9م	م	م	م	صفر	صفر	صفر

د- وبعد استكمال الحل بطريقة السمبلكس المعتادة نصل إلى الحل المثل للنموذج الثنائى كما يلى:

جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائى

		م ز	2100	1600	1700	صفر	صفر	صفر	م	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ف_1$	$ف_2$	$ف_3$	$و_1$	$و_2$	$و_3$
1600	$ص_2$	$\frac{3}{2}$	صفر	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	صفر	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	صفر
صفر	$ف_3$	$\frac{25}{2}$	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	-1
2100	$ص_1$	1	1	صفر	1	1	-2	صفر	-1	$\frac{3}{2}$	صفر
	ل ز	4500	2100	1600	1300	-300	-200	صفر	300	-850	صفر
	م ز – ل ز		صفر	صفر	400	300	200	صفر	م-300	م+850	م

المقارنة بين نتائج حل كل من النموذج الأصلى والنموذج الثنائى باستخدام طريقة السمبلكس المعتادة:

1- إن قيم المتغيرات ($ص_1$، $ص_2$، $ص_3$) فى جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الثنائى (1 ، $\frac{3}{2}$ ، صفر) هى القيم المطلقة لمعاملات المتغيرات ($ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$) فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلى. وهذه القيم هى أسعار الظل للمتغيرات الأصلية ($س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$) ، وعلى ذلك فإن حل النموذج الثنائى يؤدى إلى الوصول أسعار الظل للمتغيرات الأصلية.

2- إن قيم المتغيرات ($س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$) فى جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلى (300، 200، صفر) هى بالضبط القيم التى توصلنا إليها فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الثنائى لمعاملات المتغيرات ($ف_1$ ، $ف_2$ ، $ف_3$).

3- حل المشكلة الأصلية (النموذج الأصلى) موجود فى الصف الأخير (م ز – ل ز) (صف اختبار المثالية) للمشكلة الثنائية (النموذج الثنائى) تحت المتغيرات غير الوهمية كما يوضح ذلك الجدول التالى:

النموذج الثنائى			النموذج الأصلى	
قيم المتغير	صف اختيار المثالية		قيم متغيرات الحل	المتغيرات الاساسية
300	$ف_1$	⟵	300	$س_1$
200	$ف_2$	⟵	200	$س_2$
400	$ص_3$	⟵	400	$ع_3$

4- نفس الشئ حل المشكلة الثنائية (النموذج الثنائى) موجود فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) (صف اختبار المثالية) تحت المتغيرات غير الأساسية، كما يوضح الجدول التالى:

النموذج الأصلي			النموذج الثنائي	
قيم المتغير	صف اختيار المثالية		قيم متغيرات الحل	المتغيرات الاساسية
1	$ع_1$	⟵	1	$ص_1$
$\frac{3}{2}$	$ع_2$	⟵	$\frac{3}{2}$	$ص_2$
$\frac{25}{2}$	$س_3$	⟵	$\frac{25}{2}$	$ف_3$

مثال(6):

إذا توفر لديك النموذج الأصلي التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

عظم (ر) = 20 $س_1$ + 10 $س_2$

فى ظل:

5 $س_1$ + 4 $س_2$ ≤ 24

2 $س_1$ + 5 $س_2$ ≤ 13

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

المطلوب:

1- اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

2- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج الأصلى السابق.

3- تحديد قيم متغيرات الحل الأمثل للنموذج الثنائى وتحديد قيمة الحل الأمثل للنموذج الثنائى (وذلك باستخدام الحل الأمثل للنموذج الأصلى وبدون حل النموذج الثنائى).

الحـل

1- اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق:

النموذج الثنائى هو:

دالة الهدف (ت) = 24 ص$_1$ + 13 ص$_2$

فى ظل:

5 ص$_1$ + 2 ص$_2$ ≥ 20

4 ص$_1$ + 5 س$_2$ ≥ 10

ص$_1$ ، ص$_2$ ≥ صفر

2- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج الأصلى: بإتباع الخطوات المعروفة لأسلوب السمبلكس المعتاد، ويتمثل جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلى فيما يلى:

جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلى

م ز			20	10	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$
20	س$_1$	$\frac{24}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	صفر
صفر	ع$_2$	$\frac{17}{5}$	صفر	$\frac{17}{5}$	$\frac{2}{5}$	1
	ل ز	96	20	16	4	صفر
م ز – ل ز			صفر	-6	-4	صفر

- لاحظ أن المتغيرات المستخدمة في النموذج الأصلى هى:

(س$_1$ ، ع$_2$) ← متغيرات أساسية ،

($س_2$ ، $ع_1$) ← متغيرات غير أساسية .

وتتمثل المتغيرات المقابلة لتلك المتغيرات فى النموذج الثنائى كما يلى:

متغيرات النموذج الأصلى		متغيرات النموذج الثنائى
متغيرات أساسية	←	متغيرات غير أساسية
$س_1$	←	$ف_1$
$ع_2$	←	$ص_2$
متغيرات غير أساسية	←	متغيرات أساسية
$س_2$	←	$ف_2$
$ع_1$	←	$ص_1$

النموذج الأصلى			النموذج الثنائى	
المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل		صف اختبار المثالية	قيم المتغير
$س_1$	$\frac{24}{5}$	←	$ف_1$	$\frac{24}{5}$
$ع_2$	$\frac{17}{5}$	←	$ص_2$	$\frac{17}{5}$

النموذج الأصلى			النموذج الثنائى	
صف اختبار المثالية	قيم المتغير		المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل
$س_2$	6	←	$ف_2$	6
$ع_1$	4	←	$ص_1$	**4**

وعلى ذلك نجد أن قيم متغيرات الحل الأمثل فى النموذج الثنائى كما يلى:

$ص_1$ = 4 ، $ص_2$ = صفر، $ف_1$ = صفر، $ف_2$ = 6

* قيمة الحل الأمثل للنموذج الثنائى: بالتعويض عن قيمة كل من ص$_1$ ، ص$_2$ فى دالة الهدف:

$$24 \times 4 + 13 \times \text{صفر} = 96$$

لاحظ أن: قيمة ربح الحل (96) جنيه فى ظل الحل الأمثل فى النموذج الأصلى (=) قيمة تكلفة الحل (96) جنيه فى ظل الحل المثل للنموذج الثنائى.

أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس أو أسلوب مقابل السمبلكس: Dual Simplex

بذل "تشارلز ليمكى" الكثير من الجهود سعياً وراء التوصل إلى طرق جديدة لحل مشكلات البرمجة الخطية بحيث يتمكن الباحثون عن طريق استخدامها من توفير كل من الوقت والجهد المبذولين فى حل هذه المشكلات.

هذا وقد أسفرت جهود " تشارلز ليمكى" عن التوصل إلى أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس والتي بمقتضاها يتم البدء فى حل المشكلة عن طريق استخدام متغيرات ذات قيمة سالبة. حيث اتضح عند استخدام أسلوب السمبلكس المعتاد فى حالة وجود قيود بها ≤ أو = فإنه يجب علينا أن نستخدم أسلوب المتغيرات الوهمية و$_1$ ، و$_2$ والقيمة الكبرى (م) فى عملية الصياغة والحل. ومن هنا فإن أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس هو أسلوب أكثر سهولة لا يستلزم إضافة متغيرات وهمية. وعلى الرغم من أن هذا الأسلوب يبدو مغايراً لأسلوب السمبلكس المعتاد حيث أنه يبدأ بحلاً مبدئياً فيه قيم المتغيرات ممن الممكن أن تأخذ قيماً سالبة، إلا أنه يضمن أن يكون ذلك عملية مرحلية تبدأ من حلاً غير ممكناً إلى حلاً ممكناً وأمثل.

يمكن توضيح كيفية استخدام أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس فى حل مشكلات البرمجة الخطية من خلال حل المثال التالى:

مثال(7):

إذا توفر لديك النموذج الرياضى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

تدنيه (ت) = 16 $س_1$ + 20 $س_2$

فى ظل:

6 $س_1$ + 6 $س_2$ ≤ 60

8 $س_1$ + 4 $س_2$ ≤ 48

2 $س_1$ + 4 $س_2$ ≤ 24

$س_1$ ، $س_2$ ≤ صفر

المطلوب: استخدام أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس فى حل النموذج السابق.

الحـل

1- ضرب دالة الهدف والقيود فى إشارة سالبة، وعلى ذلك تبدو المشكلة على الصورة التالية:

عظم (ر) = −16 $س_1$− 20 $س_2$

فى ظل:

− 6 $س_1$ − 6 $س_2$ ≥ −60

− 8 $س_1$ − 4 $س_2$ ≥ −48

− 2 $س_1$− 4 $س_2$ ≥ −24

2- توجية المشكلة نحو الحل المبدئى بإضافة المتغيرات العاطلة:

عظم (ر) = −16 $س_1$ − 20 $س_2$ + صفر $ع_1$ + صفر $ع_2$ + صفر $ع_3$

فى ظل:

−6 $س_1$ − 6$س_2$ + $ع_1$ + صفر $ع_2$+ صفر $ع_3$ = −60

− 8 $س_1$ − 4 $س_2$ + صفر $ع_1$ + $ع_2$ + صفر $ع_3$ = −48

− 2 $س_1$ − 4 $س_2$ + صفر $ع_1$+ صفر $ع_2$+ $ع_3$ = −24

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئى:

جدول السمبلكس المبدئى

م ز			-16	-20	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
صفر	ع$_1$	-60	-6	-6	1	صفر	صفر
صفر	ع$_2$	-48	-8	-4	صفر	1	صفر
صفر	ع$_3$	-24	-2	-4	صفر	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز – ل ز		16	20	صفر	صفر	صفر

لاحظ أنه فى الجدول السابق قد تم حساب قيمة الصف الأخير (م ز – ل ز) عن طريق طرح قيمة دالة الهدف من قيمة الصف (ل ز) وهذا عكس ما اعتدنا عليه عند استخدام طريقة السمبلكس المعتادة.

هذا كما أن الجدول السابق لا يمثل جدول الحل الأمثل نظراً لوجود قيم موجبة فى الصف الأخير (م ز – ل ز)، وكذلك هو حل غير ممكن لوجود قيم سالبة في عمود قيم متغيرات الحل، وفى ضوء ذلك فإن الأمر يتطلب تحسين الحل السابق، ويتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

4- التحسين الأول للحل: ويتم ذلك بإتباع الخطوات الفرعية التالية:

أ- تحديد المتغير الذى يترك الحل: ويتم ذلك باختيار المتغير صاحب أكبر رقم أمامه إشارة سالبة فى عمود قيم متغيرات الحل، وهو هنا المتغير (ع$_1$).

ب- تحديد المتغير الذى يدخل الحل: ويتم ذلك عن طريق قسمة أرقام الصف الأخير (م ز – ل ز) الموجودة فى أعمدة المتغيرات غير الأساسية على القيم المناظرة فى صف (ع$_1$) الذى يترك الحل كما يلى:

(1)	(2)	(3)	(4)
المتغيرات غير الأساسية	(م ز – ل ز)	القيم المناظرة فى صف $ع_1$	(2) ÷ (3)
$س_1$	16	6–	$-\frac{16}{6}$
$س_2$	20	6–	$-\frac{20}{6}$

ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة (أقل قيمة مطلقة) وهو هنا المتغير ($س_1$).

جـ– تحديد قيم الصف ($س_1$) الجديدة:

قسمة جميع أرقام الصف ($ع_1$) ÷ رقم البؤرة

–60 ÷ –6 = (10) ، –6 ÷ –6 = (1) ، –6 ÷ –6 = (1) ،

1÷ –6 = ($-\frac{1}{6}$) ، صفر ÷ –6 = (صفر) ، صفر ÷ –6 = (صفر)

وبالتالى فإن أرقام صف ($س_1$) فى جدول السمبلكس الثانى هى: (10 ، 1 ، 1 ، $-\frac{1}{6}$ ، صفر ، صفر)

د– تحديد قيم صف ($ع_2$) فى جدول السمبلكس الثانى:

هي: (32 ، صفر ، 4 ، $-\frac{4}{3}$ ، 1 ، صفر)

هـ– قيم صف ($ع_3$) فى جدول السمبلكس الثانى:

هي: (–4 ، صفر ، –2 ، $-\frac{1}{3}$ ، صفر ، 1)

و– اعداد جدول السمبلكس الثانى:

جدول السمبلكس الثانى

م ز			−16	−20	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
−16	$س_1$	10	1	1	$-\frac{1}{6}$	صفر	صفر
صفر	$ع_2$	32	صفر	4	$-\frac{4}{3}$	1	صفر
صفر	$ع_3$	−4	صفر	−2	$-\frac{1}{3}$	صفر	1
	ل ز	−160	−16	−16	$\frac{8}{3}$	صفر	صفر
م ز − ل ز			صفر	4	$\frac{8}{3}$	صفر	صفر

يلاحظ أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل كما أنه جدول حل غير ممكن

5− التحسين الثانى للحل: نتبع نفس الخطوات السابقة

أ− المتغير الذى يخرج من الحل هو ($ع_3$)

ب− المتغير الذى يدخل الحل هو ($س_2$)

حـ− قيم الصف ($س_2$) فى جدول السمبلكس الثالث هى:

(2 ، صفر ، 1 ، $\frac{1}{6}$ ، صفر ، $-\frac{1}{2}$)

د− قيم الصف ($س_1$) فى جدول السمبلكس الثالث هى:

(8 ، 1 ، صفر ، $-\frac{1}{6}$ ، صفر ، $\frac{1}{2}$)

هـ− قيم الصف ($ع_2$) فى جدول السمبلكس الثالث هى:

(24 ، صفر ، صفر ، −2 ، 1 ، 2)

و− اعداد جدول السمبلكس الثالث:

جدول السمبلكس الثالث:

م ز			-16	-20	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
-16	س$_1$	8	1	صفر	$-\frac{1}{6}$	صفر	$\frac{1}{2}$
صفر	ع$_2$	24	صفر	صفر	-2	1	2
-20	س$_2$	2	صفر	1	$\frac{1}{6}$	صفر	$-\frac{1}{2}$
	ل ز	-168	-16	-20	$-\frac{2}{3}$	صفر	2
م ز - ل ز			صفر	صفر	$-\frac{2}{3}$	صفر	2

وحيث أن كل قيم متغيرات الحل فى جدول السمبلكس الثالث هى قيم موجبة فإن ذلك يعد حلاً ممكناً وفقاً لأسلوب مقابل السمبلكس ويتمثل الحل فى:
إنتاج 8 وحدات من (س$_1$) ، ووحدتين من (س$_2$) وربح الحل هو (168) جنيه.

- **الفروق بين أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس وأسلوب السمبلكس المعتاد:**

تتمثل الفروق الأساسية بين أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس وبين أسلوب السمبلكس المعتاد فيما يلى:

1- فى ظل أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس نبدأ أولاً بتحديد المتغير المؤهل للخروج من الحل، ثم بعد ذلك نقوم بتحديد المتغير المؤهل للدخول إلى الحل وذلك على عكس ما هو متبع فى أسلوب السمبلكس المعتاد.

2- فى ظل أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس يخرج من الحل المتغير صاحب أكبر رقم أمامه إشارة سالبة فى عمود قيم متغيرات الحل أما فى ظل أسلوب السمبلكس المعتاد فإن المتغير الذى يخرج من الحل هو المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب للقيم الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على القيم المقابلة فى عمود المتغير الذى يدخل الحل (عمود البؤرة).

3- فى ظل أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس يتم تحديد المتغير الذى يدخل الحل عن طريق قسمة الأرقام الموجودة فى أعمدة المتغيرات غير الأساسية فى الصف الأخير (م ز – ل ز) على الأرقام المناظرة فى صف المتغير الذى يترك الحل واختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة (أقل قيمة مطلقة). أما فى أسلوب السمبلكس المعتاد فالمتغير الذى يدخل الحل هو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) وذلك فى حالة تعظيم الربح.

4- يتم حساب القيم الموجودة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فى ظل أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس عن طريق طرح معاملات دالة الهدف من قيم الصف (ل ز) وهذا عكس ما اعتدنا عليه فى أسلوب السمبلكس المعتاد.

5- يساعد أسلوب الوجه الأخر للسمبلكس فى التغلب على مشكلة عدم إمكانية الحل (عند ظهور قيم سالبة أمام المتغيرات الأساسية فى عمود قيم متغيرات الحل) والتى قد تظهر عند استخدام أسلوب السمبلكس المعتاد.

تمارين علي الفصل الرابع

تمرين (1):

إذا توفر لديك النموذج الرياضى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

عظم (ر) = 3 $س_1$ + 4 $س_2$

فى ظل أن:

2 $س_1$ + 3 $س_2$ ≤ 20

5 $س_1$ + 4 $س_2$ ≤ 30

$س_1$ ، $س_2$ ≥ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

تمرين (2):

قم بكتابة الصيغة الثنائية لمشكلة البرمجة الخطية التالية:

عظم (ر) = 10 $س_1$ + 9 $س_2$

فى ظل أن:

$\frac{7}{10}$ $س_1$ + $س_2$ ≤ 630

$\frac{1}{2}$ $س_1$ + $\frac{5}{6}$ $س_2$ ≤ 600

$س_1$ + $\frac{2}{3}$ $س_2$ ≤ 708

$\frac{1}{10}$ $س_1$ + $\frac{1}{4}$ $س_2$ ≤ 135

$س_1$ ، $س_2$ ≥ صفر

تمرين (3):

إذا توفر لديك النموذج الأصلى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

عظم (ر) = 5 $س_1$ + 6 $س_2$

فى ظل أن:

$س_1$ + 2 $س_2$ = 5

$-$ س$_1$ + 5 س$_2$ ≤ 3

4 س$_1$ + 7 س$_2$ ≥ 8

س$_1$ ، س$_2$ ≤ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

تمرين (4): قم بكتابة الصيغة الثنائية لمشكلة البرمجة الخطية التالية:

تدنية (ت) = 5 س$_1$ $-$ 2 س$_2$

فى ظل أن:

$-$ س$_1$ + س$_2$ ≤ $-$ 3

2 س$_1$ + 3 س$_2$ ≥ 5

س$_1$ ، س$_2$ ≤ صفر

تمرين (5): إذا توفر لديك النموذج الأصلى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

عظم (ر) = 6 س$_1$ + 4 س$_2$

فى ظل أن:

2 س$_1$ + س$_2$ ≥ 20

س$_1$ + 2 س$_2$ ≥ 16

س$_1$ ، س$_2$ ≤ صفر

المطلوب:

1- اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

2- قارن بين نتائج حل كل من النموذج الأصلى والنموذج الثنائى باستخدام أسلوب السمبلكس.

تمرين (6): إذا كان النموذج الأصلى لأحد مشاكل البرمجة الخطية كما يلى:

عظم (ر) = س$_1$ + 5 س$_2$ + 3 س$_3$

فى ظل أن:

$س_1 + 2 س_2 + س_3 = 3$

$2 س_1 - س_2 = 4$

$س_1 ، س_2 ، س_3 \leq$ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

تمرين (7): إذا كان النموذج الأصلى لأحد مشاكل البرمجة الخطية كما يلى:

عظم (ر)= $10 س_1 + 9 س_2$

فى ظل أن:

$5 س_1 + 4 س_2 \geq 120$

$2 س_1 + 4 س_2 \geq 60$

$س_1 ، س_2 \leq$ صفر

المطلوب:

1- حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس.

2- عمل الصياغة الثنائية مع حلها باستخدام أسلوب السمبلكس.

3- وضح ماذا تلاحظ بين الحل الأمثل فى ظل الصياغة الأصلية والحل الأمثل فى ظل الصياغة الثنائية.

تمرين (8): الجدول التالى يعبر عن الحل الأمثل للنموذج الثنائى لمشكلة البرمجة الخطية التالية:

تدنية (ت) = $120 ص_1 + 240 ص_2$

فى ظل أن:

$2 ص_1 + 2 ص_2 \leq 0.5$

$ص_1 + 3 ص_2 \leq 0.4$

م ز			120	240	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	ص$_1$	ص$_2$	ف$_1$	ف$_2$	و$_1$	و$_2$
120	ص$_1$	0.175	1	صفر	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
240	ص$_2$	0.075	صفر	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	ل ز	39	120	240	− 30	− 60	30	60
	م ز − ل ز		صفر	صفر	30	60	م−30	م−60

المطلوب:

1- ايجاد الصياغة الأصلية لهذه المشكلة.

2- تحديد قيم متغيرات الحل الأمثل للنموذج الأصلي وتحديد قيمة الحل الأمثل للنموذج الأصلي (وذلك باستخدام الحل الأمثل للنموذج الثنائي وبدون حل النموذج الأصلي).

الفصل الخامس

تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية

Sensitivity Analysis

- مفهوم أسلوب تحليل الحساسية.
- أنماط تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية:

النمط الأول: تحديد أثر التغير فى كميات الموارد المتاحة أو قيم الطرف الأيسر فى القيود.

النمط الثانى: تحديد أثر التغير فى معاملات دالة الهدف.

النمط الثالث: تحديد أثر التغير فى المعاملات الفنية لمتغيرات القيود (ثوابت الطرف الأيمن للقيود).

النمط الرابع: تحديد أثر اضافة قيد جديد إلى القيود الحالية لنموذج البرمجة الخطية.

- تمارين للتدريب.

تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية

مفهوم أسلوب تحليل الحساسيه:

يعتبر نموذج البرمجة الخطية أحد نماذج التأكد التام، حيث يمكن القول أن ثوابت هذا النموذج سواء ما كان منها متعلقاً بدالة الهدف أو متعلقاً بموارد الطرف الأيسر للقيود أو خاصاً بمصفوفة معاملات الطرف الأيمن هى ثوابت معلومة ومؤكدة على وجة اليقين.

وعلى الرغم من ذلك فإن هذا الافتراض قد يجانبه الصواب فى بعض الأحيان، حيث قد تكون معرفتنا بها معرفة جزئية فى أحيان أخرى حيث تسود ظروف عدم التأكد عند قياس واحد أو أكثر منها الأمر الذى يتطلب ضرورة تحديد أثر التغير فى بعض هذه الثوابت على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية موضع الدراسة والتحليل.

وفى ضوء ذلك يمكن القول أن عمليتى تكوين نموذج البرمجة الخطية وحساب الحل الأمثل لهذا النموذج لا تمثلان تحليلا كاملاً لمشكلة البرمجة الخطية، وإنما يتطلب الأمر ضرورة وجود عملية ثالثة تعرف باسم تحليل الحساسية يجب إجرائها لاستكمال التحليل الخاص بمشكلة البرمجة الخطية.

وبعد أن نصل إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، يكون فى الغالب هناك تساؤل عما سوف يحدث لهذا الحل إذا تغير أحد أجزاء المشكلة التى تم حلها ومثال ذلك:

1- ماذا يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت القيمة الموجودة فى الطرف الأيسر لأحد القيود (والتى تعبر عن الموارد المتاحة).

2- ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت أحد القيم الموجودة فى دالة الهدف (معاملات دالة الهدف).

3- ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت المعاملات الموجودة فى الطرف الأيمن من متباينات القيود (ثوابت الطرف الأيمن للقيود).

فى مثل هذه الحالات يثار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية سوف يتغير أم سيبقى كما هو. وإذا كان سوف يتغير هل لابد من حل كل المشكلة مرة أخرى بالقيم الجديدة للوصول إلى الحل الأمثل ، هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخرى؟ الإجابة على ذلك تكمن فيما يسمى بتحليل الحساسية.

ويقصد بتحليل الحساسية "درجة حساسية الحل الأمثل الحالى للتغير الذى قد يطرأ على أحد القيم الأساسية فى المشكلة الأصلية لنموذج الخطية (دالة الهدف + القيود).

بمعنى آخر: ماذا يحدث لو توصلنا إلى جدول الحل الأمثل ثم تغيرت أحد أجزاء المشكلة، أى ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل الحالى؟

هذا ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن أسلوب تحليل الحساسية يبحث أثر التغير فى قيم ثوابت نموذج البرمجة الخطية على أساس فردى، فيختار أحد الثوابت ويقوم بدراسة أثر التغير فى قيمته وذلك مع ثبات قيم الثوابت الأخرى على ما هى بدون تغيير، وبالتالى فإنه إذا تغيرت القيم لأكثر من ثابت فى آن واحد فإنه لا يمكن الاعتماد على أسلوب تحليل الحساسية حتى وإن كانت هذه التغيرات داخل الحدود المقررة سلفاً . بمعنى أن أسلوب تحليل الحساسية يقتصر على بيان وتوضيح إلى أى مدى يظل الحل الأمثل للمشكلة حلاً أمثل إذا تغيرت فقط قيمة أحد متغيرات مشكلة البرمجة الخطية.

أنماط تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية:

يتضمن تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية أربعة أنماط أساسية تتمثل فى:

1- تحديد أثر التغير فى كميات الموارد المتاحة أو قيم الطرف الأيسر فى القيود.

2- تحديد أثر التغير فى معاملات دالة الهدف أى التغير فى مساهمة الوحدة.

3- تحديد أثر التغير في المعاملات الفنية لمتغيرات القيود أى تغير المعاملات فى الطرف الأيمن فى متباينات القيود.

4- تحديد أثر اضافة قيد جديد إلى القيود الحالية لنموذج البرمجة الخطية.

ونتناول كل نمط من هذه الأنماط بالدراسة والتحليل كما يلى:

النمط الأول: تحديد أثر التغير فى كميات الموارد المتاحة أو قيم الطرف الأيسر فى القيود:

تعرف القيم على الجانب الأيسر لقيود مشكلة البرمجة الخطية بالموارد أو المصادر المتاحة، وهذه الموارد أو المصادر عرضة للتغيير، ومما هو جدير بالذكر عند حل نموذج البرمجة الخطية أن جميع هذه الموارد أو المصادر يجب أن تكون أكبر من أو يساوى ($\leq$) الصفر، لأن ذلك يعنى أن التغيير الذى يمكن أن يصاحب هذه الموارد أو المصادر يجب ألا يجعل قيم العوامل الأساسية قيماً سالبة فى الجانب الأيسر.

ونظراً لأن سعر الظل عبارة عن التغير الذى يحدث فى دالة الهدف والذى ينتج عن زيادة الكميات من الموارد على الجانب الأيسر لكل قيد من قيود هذه الموارد بمقدار وحدة واحدة، لذا فإن هذا السعر هو الذى يوفر المعلومات المتعلقة بقيم الموارد الإضافية، حيث يمكننا من تحديد مقدار الوحدات الاضافية التى يمكن الحصول عليها من الموارد المتاحة فى كل قيد من قيود المشكلة، وبالتالى فإنه من خلال تحليل القيم على الجانب الأيسر لقيود هذه المشكلة يمكن معرفة المدى (الحدين الأدنى والأعلى) والذى يظل فيه سعر الظل فعالاً.

ومما تجدر الإشارة إليه عند تحديد الحدين الأدنى والأعلى لمدى التغير فى كميات الموارد المتاحة لقيود مشكلة البرمجة الخطية ضرورة التفرقة بين كل من الموارد النادرة التى يمكن التحكم فيها وهى تمثل تلك الموارد التى يمكن استغلالها بالكامل، والموارد الأخرى النادرة والتى لا يمكن التحكم فيها وتتمثل فى تلك الموارد التى لا يمكن استغلالها بالكامل.

هذا ويمكن تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذى يمكن أن تتغير فى ضوئه كميات الموارد المتاحة على الجانب الأيسر من قيود مشكلة البرمجة الخطية وذلك دون أن يتغير مزيج الحل الأمثل بحث تظل المتغيرات الأساسية للحل كما هى ودون أن تؤثر على أسعار الظل كما يلى:

أ- ايجاد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذى يمكن أن تتغير فى ضوئه كميات الموارد المتاحة من الموارد النادرة التى لا يمكن التحكم فيها عن طريق عدم استغلالها بالكامل:

خطوات تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) فى هذه الحالة كما يلى:

1- يتم تحديد الحد الأدنى لهذا المورد عن طريق طرح قيمة المتغير العاطل الذى يشير إلى هذا المورد من الكمية المتاحة له والتى تمثل قيمة الطرف الأيسر الخاصة بهذا القيد.

الحد الأدنى = الكمية المتاحة من المورد – قيمة المتغير العاطل الخاص بهذا المورد.

2- يتم تحديد الحد الأعلى لهذا المورد باعتباره يساوى موجب مالا نهاية ($+\infty$) وذلك على اعتبار أن اضافة أيه كمية تزيد من مقدار الطرف الأيسر لهذا المورد لن يؤثر على مزيج الحل الأمثل.

ملحوظة: يقصد بالمورد النادر الذى لا يمكن التحكم فيه عن طريق عدم استغلاله بالكامل بالمتغير العاطل (ع) الذى ظهر ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل.

ب- ايجاد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذى يمكن أن تتغير فى ضوئه كميات الموارد المتاحة من الموارد النادرة التى يمكن التحكم فيها عن طريق استغلالها بالكامل:

خطوات تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) فى هذه الحالة كما يلى:

1- تحديد المتغير العاطل (ع) الذى أضيف إلى معادلة القيد الذى تغير الجانب الأيسر له.

2- تحديد قيم متغيرات الحل الجديدة

= قيم متغيرات الحل الأصلية + (معاملات عمود المتغير العاطل الخاص بالمورد الذى تغير × Δ) .

3- حتى يظل الحل الأمثل الحالى ممكنا فلابد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة لكل المتغيرات الأساسية قيم غير سالبة ، بمعنى أن تكون ≤ صفر.

4- للحكم على ما إذا كانت الزيادة فى قيمة المورد النادر تؤدى إلى جعل الحل الأمثل الحالى ممكناً أو غير ممكن نطبق القاعدة التالية:

[قيم متغيرات الحل بعد الزيادة] = [مصفوفة المتغيرات التى بدأنا بها جدول الحل المبدئى وذلك فى جدول الحل الأمثل] × [قيم الطرف الأيسر بعد الزيادة]

فإذا كانت كل القيم فى عمود قيم متغيرات الحل بعد الزيادة (الجديدة) موجبة فهذا يعنى أن الحل الأمثل الحالى حلاً ممكناً ومثالي فى نفس الوقت.

ملحوظة: يقصد بالمورد النادر الذى يمكن التحكم فيه عن طريق استغلاله بالكامل بالمتغير العاطل (ع) الذى ظهر ضمن المتغيرات غير الأساسية فى جدول الحل الأمثل.

مثال (1):

فيما يلى جدول الحل الأمثل النهائى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ز			40	30	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س_1	س_2	ع_1	ع_2
40	س_1	110	1	صفر	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$
30	س_2	25	صفر	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$
	ل ز	5150	40	30	$\frac{25}{4}$	$\frac{35}{12}$
	م ز − ل ز		صفر	صفر	$-\frac{25}{4}$	$-\frac{35}{12}$

وكانت القيود الأصلية لهذه المشكلة هى:

$5\text{س}_1 + 2\text{س}_2 \le 600$ (المورد الأول)

$3\text{س}_1 + 6\text{س}_2 \le 480$ (المورد الثانى)

المطلوب:

1- ما هو المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً ؟

2- ما هو المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثانى مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً ؟

3- إذا زادت قيمة المورد الثانى بمقدار (20) وحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل ؟

الحل

1- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً:

يلاحظ أن التغير فى قيمة الموارد المتاحة سوف يؤثر فقط على العمود الخاص بقيم متغيرات الحل وهذا معناه التأثير فى مدى امكانية الوصول

إلى حل ممكن للمشكلة. وحتى يكون الحل الجديد حلاً ممكناً فيجب ألا تكون قيم المتغيرات الأساسية قيم سالبة.

توجد طريقتين لتحديد ذلك المدى وهما:

الطريقة الأولى: تحديد المتغير العاطل الذى أضيف إلى معادلة القيد الأول نجده ($ع_1$) ← متغير غير أساسى، وحتى يظل الحل الأمثل الحالى ممكناً فلا بد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة نتيجة لحدوث التغير فى قيمة المورد الأول قيم غير سالبة بمعنى أن تكون ≤ صفر

أ- قيم متغيرات الحل الجديدة

= قيم متغيرات الحل الأصلية + Δ_1 (معاملات عمود $ع_1$ في جدول الحل الأمثل)

عند $س_1$ ← $110 + \frac{1}{4}\ \Delta_1$

عند $س_2$ ← $25 - \frac{1}{8}\ \Delta_1$

ب- وحتى يظل الحل الأمثل الحالى ممكناً لابد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة ≤ صفر

*** بالنسبة لـ $س_1$ نجد أن:**

$110 + \frac{1}{4}\ \Delta_1 \leq$ صفر

$\therefore \frac{1}{4}\ \Delta_1 \leq -110$ بالضرب فى (4)

$\therefore \Delta_1 \leq -440$ ← (1)

*** بالنسبة لـ $س_2$ نجد أن:**

$25 - \frac{1}{8}\ \Delta_1 \leq$ صفر

$-\frac{1}{8}\ \Delta_1 \leq -25$ بالضرب فى 8

$-\Delta_1 \leq -200$ بالضرب فى -1 مع تغيير اشاره المتباينة

$\Delta_1 \geq 200$ ← (2)

من (1) ، (2) فإن :

$$-440 \leq \Delta_1 \leq 200$$

ويعنى هذا أن هناك مدى معين للتغير الذى يمكن أن يحدث فى الطرف الأيسر للقيد الأول، دون أن يتغير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة فى الحل الأمثل الحالى وهذا المدى هو بين 200 ، − 440 .

أى أن قيمة المورد الأول يمكن أن تنخفض إلى (600 − 440) = 160 وحدة، وتزيد إلى أن تصل (600 + 200) = 800 وحدة ويظل الحل الأمثل ممكناً.

الحد الأدنى للتغير فى قيمة المورد الأول = 600 − 440 = 160 وحدة.

الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الأول = 600 + 200 = 800 وحدة.

الطريقة الثانية: تجدر الإشارة إلى أنه توجد طريقة آخرى تمكن من تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى الذى يمكن أن تتغير فى ضوئه كميات الموارد المتاحة من الموارد النادرة التى يمكن التحكم فيها عن طريق استغلالها بالكامل (أى المتغيرات العاطلة (ع) التى ظهرت ضمن المتغيرات غير الأساسية فى جدول الحل المثل).

وتتمثل خطوات تلك الطريقة فيما يلى:

1− يتم تحديد الحد الأدني لهذا المورد عن طريق قسمة الأرقام الواردة فى عمود قيم متغيرات الحل بجدول الحل الأمثل على قيم معاملات عمود المتغير العاطل الذى يشير إلى هذا المورد ثم طرح أصغر ناتج قسمة موجب من كمية الموارد المتاحة للقيد.

2− يتم تحديد الحد الأعلى لهذا المورد عن طريق قسمة الأرقام الواردة فى عمود قيم متغيرات الحل بجدول الحل الأمثل على قيم معاملات عمود المتغير العاطل الذى يشير إلى هذا المورد بعد ضربها فى (−1) ثم اضافة أصغر ناتج قسمة موجب إلى كمية الموارد المتاحة للقيد.

وبتطبيق تلك الطريقة على المثال السابق (رقم1) يمكن **تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذى يمكن أن يتغير فى حدوده قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً كما يلى:**

* المورد الأول ← يعبر عنه المتغير العاطل ($ع_1$)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عمود قيم متغيرات الحل	عمود ($ع_1$)	عمود ($ع_1$) × −1	عمود (1) ÷ عمود(2)	عمود (1) ÷ عمود (3)
110	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	440	−440
25	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	−200	200

∴ الحد الأدنى للتغير فى قيمة المورد الأول

= الكمية المتاحة من المورد الأول – أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (4)

= 600 − 440 = 160 وحدة .

∴ الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الأول

= الكمية المتاحة من المورد الأول + أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (5)

= 600 + 200 = 800 وحدة .

وهى نفس النتائج التى تم التوصل إليها باستخدام الطريقة الأولى.

2− **تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثاني مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً:**

الطريقة الأولى: تحديد المتغير العاطل الذى أضيف إلى معادلة القيد الثاني نجده ($ع_2$) ← متغير غير أساسى، وحتى يظل الحل الأمثل الحالى ممكناً فلا بد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة نتيجة لحدوث التغير فى قيمة المورد الثاني قيم غير سالبة بمعنى أن تكون ≤ صفر

أ- قيم متغيرات الحل الجديدة

= قيم متغيرات الحل الأصلية + Δ_2 (معاملات عمود ع$_2$ في جدول الحل الأمثل)

عند س$_1$ ← $110 - \frac{1}{12}\Delta_2$

عند س$_2$ ← $25 + \frac{5}{24}\Delta_2$

ب- وحتى يظل الحل الأمثل الحالى ممكناً لابد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة ≤ صفر

*** بالنسبة لـ س$_1$ نجد أن:**

$110 - \frac{1}{12}\Delta_2 \leq$ صفر

$-\frac{1}{12}\Delta_2 \leq -110$ بالضرب فى 12

∵ $-\Delta_2 \leq -1320$ بالضرب فى -1 مع تغيير إشارة المتباينة

∴ $\Delta_2 \geq 1320$ ← (1)

*** بالنسبة لـ س$_2$ نجد أن:**

$25 + \frac{5}{24}\Delta_2 \leq$ صفر

$\frac{5}{24}\Delta_2 \leq -25$ بالضرب فى (24)

∴ $5\Delta_2 \leq -600$ بالقسمة على (5)

∴ $\Delta_2 \leq -120$ ← (2)

من (1) ، (2) فإن :

$-120 \geq \Delta_2 \geq 1320$

الحد الأدنى للتغير فى قيمة المورد الثاني = = 480 – 120 = 360 وحدة.

الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الثاني = 480 + 1320 = 1800 وحدة.

الطريقة الثانية: تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذى يمكن أن يتغير فى حدوده قيمة المورد الثانى مع بقاء الحل ممكناً كما يلى:

* المورد الثانى ← يعبر عنه المتغير العاطل ($ع_2$)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عمود قيم متغيرات الحل	**عمود($ع_2$)**	**عمود($ع_2$) × −1**	**عمود (1) ÷ عمود(2)**	**عمود (1) ÷ عمود (3)**
110	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	**−1320**	**1320**
25	$\frac{5}{24}$	$-\frac{5}{24}$	**120**	**− 120**

∴ الحد الأدنى للتغير فى قيمة المورد الثاني

= الكمية المتاحة من المورد الثاني – أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (4)

= 480 − 120 = 360 وحدة .

∴ الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الثاني

= الكمية المتاحة من المورد الثاني + أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (5)

= 480 + 1320 = 1800 وحدة .

وهى نفس النتائج التى تم التوصل إليها باستخدام الطريقة الأولى.

3- إذا زادت قيمة المورد الثانى بمقدار (20) وحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل:

للحكم على إذا ما كانت الزيادة فى قيمة المورد الثانى تؤدى إلى جعل الحل الحالى ممكن أو غير ممكن، نطبق القاعدة التالية:

لتحديد أثر زيادة قيمة المورد الثاني نطبق القاعدة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{مصفوفة المتغيرات} \\ \text{التى بدأنا بها جدول} \\ \text{الحل المبدئى وذلك فى} \\ \text{جدول الحل الأمثل} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{قيم الطرف الأيسر} \\ \text{بعد الزيادة} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{قيم متغيرات الحل} \\ \text{بعد الزيادة} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س_1 \\ س_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{325}{3} & \leftarrow & (500 \times \frac{1}{12} - 600 \times \frac{1}{4}) \\ -\frac{175}{6} & \leftarrow & (500 \times \frac{5}{24} + 600 \times \frac{1}{8} -) \end{bmatrix}$$

$س_1 = \frac{325}{3}$

$س_2 = \frac{175}{6}$

ويلاحظ أن كل القيم فى عمود قيم متغيرات الحل الجديد موجبة وهذا يعنى أن الحل الحالى ممكن ومثالى فى نفس الوقت

قيمة الحل الجديد $= 40 \times \frac{325}{3} + 30 \times \frac{175}{6} = 5208$

لاحظ أن قيمة الحل (ربح الحل الجديد) زاد نتيجه لزيادة المورد الثانى بمقدار (20) وحدة من 5150 جنيه إلى 5208 جنيه.

النمط الثانى: تحديد أثر التغير فى معاملات دالة الهدف:

من المعلوم أن دالة الهدف تشمل مجموعة من المتغيرات يتم تصنيفها فى ضوء جدول الحد الأمثل إلى متغيرات أساسية وهى تلك المتغيرات التى تدخل ضمن مزيج الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية وتظهر فى عمود المتغيرات

الأساسية فى جدول الحل الأمثل. ومتغيرات غير أساسية وهى تلك المتغيرات التى لا تدخل ضمن مزيج الحل الأمثل بجدول السمبلكس النهائى.

وتحتوى دالة هدف نموذج البرمجة الخطية على المتغيرات موضع الدراسة، وكذلك عائد المساهمة لكل وحدة من هذه المتغيرات والتى تعرف بمعاملات دالة الهدف، هذا ويتم تحليل الحساسية لهذه لمعاملات بغية تحديد مدى معين لقيمتها ، ويعرف هذا المدى بالمدى الأمثل.

ويجب عند إجراء تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف أن يتم هذا التحليل لكل معامل على حدة بطريقة منفردة وذلك لضمان دقة التحليل، ويعنى ذلك أنه إذا تم تناول أحد معاملات دالة الهدف بالتحليل فإن المعاملات الأخرى فى هذه الدالة سوف تظل ثابتة على ما هى عليه.

كما يجب أيضاً عند إجراء تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف ضرورة التفرقة بين كل من التغيرات التى تحدث فى دالة الهدف للمتغيرات الأساسية والتغيرات الأخرى التي تحدث فى معاملات هذه الدالة للمتغيرات غير الأساسية. ويمكن توضيح ذلك كما يلى:

أولاً: التغيرات التى تحدث فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية:

- **حالة تعظيم الربح:**

1- إذا حدث انخفاض فى ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى فإن ذلك لا يؤثر على الحل الأمثل الحالى.

2- إذا حدثت زيادة فى ربح الوحدة لأحد المتغيرات غير الأساسية، فإنه توجد ثلاثة حالات وهى:

أ- إذا كانت الزيادة فى ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى أكبر من معامل هذا المتغير فى الصف الأخير (م ز – ل ز) بجدول الحل الأمثل فإن تلك الزيادة سوف تؤدى إلى حل آخر جديد وذلك لأن(م ز) > (ل ز).

ب- إذا كانت الزيادة فى ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى تساوى معامل هذا المتغير فى الصف الأخير (م ز – ل ز) بجدول الحل الأمثل، فإن الحل الأمثل الحالى يظل كما هو بدون تغيير مع ظهور حالة وجود أكثر من حل أمثل لأن (م ز) = (ل ز).

ج- إذا كانت الزيادة فى ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى أقل من معامل هذا المتغير فى الصف الأخير (م ز – ل ز) فإن هذه الزيادة لا تؤدى إلى أى تغيير فى الحل الأمثل الحالى لأن (م ز) < (ل ز).

- **حالة تدنية التكاليف:**

1- إذا حدثت زيادة فى تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسى فإن ذلك لا يؤثر على الحل الأمثل الحالى.

2- إذا حدث انخفاض فى تكلفة الوحدة لأحد المتغيرات غير الأساسية فإنه توجد ثلاثة حالات وهى:

أ- إذا كان الانخفاض فى تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسى أكبر من معامل هذا المتغير فى الصف الأخير (م ز – ل ز) بجدول الحل الأمثل فإن الحل الحالى يصبح ليس هو الحل الأمثل لأن (م ز) < (ل ز).

ب- إذا كان الانخفاض فى تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسى تساوى معامل هذا المتغير فى الصف الأخير (م ز – ل ز) بجدول الحل الأمثل، فإن الحل الأمثل الحالى يظل كما هو بدون تغيير مع ظهور حالة وجود أكثر من حل أمثل لأن (م ز) = (ل ز).

ج- إذا كان الانخفاض فى تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسى أقل من معامل هذا المتغير فى الصف الأخير (م ز – ل ز) بجدول الحل الأمثل فإن ذلك الانخفاض لا يؤدى إلى أى تغيير فى الحل الأمثل الحالى لأن (م ز) > (ل ز).

ولتحديد مدى التغير فى معاملات المتغيرات غير الأساسية بحيث يظل الحل الأمثل دون تغيير فإن الأمر يتطلب ضرورة اتباع الخطوتين التاليتين:

1- يتم تحديد الحد الأدنى لمدى التغير فى معامل المتغير غير الأساسى فى صورة سالب مالا نهاية (− ∞) وهذا يعنى أن معامل هذا المتغير يمكن أن يتناقص إلى مالا نهاية، وفى نفس الوقت يظل الحل الأمثل الذى توصلنا إليه كما هو دون تغيير.

2- يتم تحديد الحد الأعلى لمدى التغير فى معامل المتغير غير الأساسى عن طريق جمع خسارة الفرصة البديلة لهذا المتغير على الربح الحدى للوحدة الواحدة من المنتج الذى يمثله هذا المتغير.

أى أن الحد الأعلى لمدى التغير فى معامل المتغير غير الأساسى تساوى الزيادة فى مقدار الربح لهذا المتغير والذى يساوى القيمة المطلقة المذكورة له فى الصف الأخير (م ز − ل ز) مضافاً إليها مساهمة الوحدة من ذلك المتغير فى دالة الهدف.

والخلاصة: الحد الأعلى لمدى التغير فى معامل المتغير غير الأساسى = القيمة المطلقة لمعامل المتغير غير الأساسى فى الصف الأخير (م ز − ل ز) + مساهمة الوحدة من ذلك المتغير فى دالة الهدف.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن تحديد المدى الأمثل لمعاملات المتغيرات غير الأساسية يتسم بالبساطة والسهولة، ويرجع ذلك بطبيعة الحال إلى أن التغير فى قيمة هذه المعاملات يؤثر على القيمة الواقعة تحته فى الصف الأخير (م ز − ل ز)، بمعنى أنه يؤثر على نفسه فقط ولا يؤثر على المتغيرات الأخرى.

مثال (2):

فى المثال السابق (رقم 1) المطلوب تحديد:

1- ما هو المدى الذى يمكن أن يتغير فى ظله ربح الوحدة من المتغير ($ع_1$) ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير؟

2- ما هو المدى الذى يمكن أن يتغير فى ظله ربح الوحدة من المتغير ($ع_2$) ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير؟

الحـــل

1- تحديد المدى الذى يمكن أن يتغير فى ظله ربح الوحدة من المتغير ($ع_1$) ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير:

حيث أن ($ع_1$) متغير غير أساسى، فإن انخفاض ربح الوحدة منه إلى سالب مالا نهاية (- ∞) لن يؤثر على الحل الأمثل وبالتالى فإن الحد الأدنى لمدى التغير فى ربح المتغير ($ع_1$) = (- ∞) .

الحد الأعلى للزيادة فى ربح الوحدة من المتغير ($ع_1$)

= القيمة المطلقة لمعامل المتغير ($ع_1$) فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) + مساهمة الوحدة من المتغير ($ع_1$) فى دالة الهدف

$= \frac{25}{4} + \text{صفر} = \frac{25}{4}$

وبالتالى فإن مدى التغير فى ربح الوحدة من ($ع_1$) هو:

$- \infty < ر\ (ع_1) \leq \frac{25}{4}$

2- تحديد المدى الذى يمكن أن يتغير فى ظله ربح الوحدة من المتغير ($ع_2$) ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير:

حيث أن ($ع_2$) متغير غير أساسى، فإن انخفاض ربح الوحدة منه إلى سالب مالا نهاية (- ∞) لن يؤثر على الحل الأمثل وبالتالى فإن الحد الأدنى لمدى التغير فى ربح المتغير ($ع_2$) = (- ∞) .

الحد الأعلى للزيادة فى ربح الوحدة من المتغير ($ع_2$)

= القيمة المطلقة لمعامل المتغير ($ع_2$) فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) + مساهمة الوحدة من المتغير ($ع_2$) فى دالة الهدف

$$= \frac{35}{12} + \text{صفر} = \frac{35}{12}$$

وبالتالى فإن مدى التغير فى ربح الوحدة من ($ع_2$) هو

$$-\infty < ر\ (ع_2) \leq \frac{35}{12}$$

ثانياً: التغيرات التى تحدث فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية:

يقصد بالمتغيرات الأساسية تلك المتغيرات التى تدخل ضمن مزيج الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية. وتجدر الإشارة إلى أن التغير فى مساهمة الوحدة لأى متغير أساسى فى الحل الأمثل لابد وأن يؤثر على كل قيم الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) الخاصة بكافة المتغيرات غير الأساسية فى الحل الأمثل، فى حين أن التغير فى مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات غير الأساسية لم يؤثر إلا نفس المتغير فقط.

لاحظ أيضاً أن التغير فى مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الأساسية يمكن أن يكون بالزيادة أو الانخفاض وعلى هذا :

1- إذا كان التغير فى مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى بالزيادة فيجب أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التى لها معاملات سالبة فى صف ذلك المتغير الأساسى.

2- إذا كان التغير فى مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى بالانخفاض فيجب أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التى لها معاملات موجبة فى صف ذلك المتغير الأساسى.

خطوات تحديد مدى التغير فى مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى:

1- قسمة الأرقام الموجودة فى الصف الأخير ($م_ز - ل_ز$) على الأرقام المقابلة فى صف المتغير الأساسى المطلوب تحديد مدى التغير فى

معاملة مع عدم السماح بالقسمة على صفر (أي تجاهل جميع النسب التى تتضمن صفر فى المقام)

2- اختيار أكبر قيمة سالبة من ناتج القسمة السابقة (أى أقرب رقم سالب إلى الصفر) ثم جمعها على معامل ذلك المتغير الأساسى فى دالة الهدف وذلك لتحديد الحد الأدنى الذى يمكن أن يحدث فى معامل هذا المتغير فى هذه الدالة، بينما إذا لم توجد قيمة سالبة فإن أقصى نقص يصبح ($-\infty$).

3- اختيار أصغر قيمة موجبة من ناتج القسمة فى الخطوة (1)، ثم جمعها على معامل المتغير الأساسى فى دالة الهدف وذلك لتحديد الحد الأعلى لمدى تغير هذا المعامل فى هذه الدالة، بينما إذا لم توجد قيمة موجبة فإن أقصى زيادة تصبح ($+\infty$).

مثال (3): فى المثال السابق (رقم 1) المطلوب تحديد:

1- مدى التغير فى ربح الوحدة من (س$_1$) مع بقاء الحل الأمثل كما هو.

الحـل

خطوات تحديد مدى التغير فى ربح الوحدة من (س$_1$) تتمثل فيما يلي:

1- قسمة الأرقام الموجودة فى الصف الأخير (م $_ز$ – ل $_ز$) على الأرقام المقابلة فى صف المتغير الأساسى (س$_1$) فى جدول السمبلكس النهائى (الأمثل) مع عدم السماح بالقسمة على صفر كما يلى:

(3)	(2)	(1)
عمود (1) ÷ عمود (2)	أرقام صف المتغير ($س_1$)	أرقام الصف ($م_ز - ل_ز$)
صفر	1	صفر
25 −	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{4}$ −
35	$\frac{1}{12}$ −	$\frac{35}{12}$ −

2− اختيار أكبر قيمة سالبة من ناتج القسمة فى الجدول السابق (أى أقرب رقم سالب إلى الصفر) فنجده (−25) ثم جمعها على معامل المتغير ($س_1$) فى دالة الهدف (40).

∴ الحد الأدنى لمدى التغير فى ربح الوحدة من ($س_1$) فى دالة الهدف

= − 25 + 40 = 15 جنيه

3− اختيار أصغر قيمة موجبة من ناتج القسمة فى الجدول السابق فنجدها (35) ثم جمعها على معامل المتغير ($س_1$) فى دالة الهدف (40)

∴ الحد الأعلى لمدى التغير فى ربح الوحدة من ($س_1$) فى دالة الهدف

= 35 + 40 = 75 جنيه

وبالتالى فإن مدى التغير فى ربح الوحدة من ($س_1$) هو

$15 \leq$ ر ($س_1$) ≤ 75

مثال (4):

فيما يلى جدول الحل الأمثل النهائى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ز			64	100	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
100	س$_2$	750	صفر	1	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر	$-\frac{3}{2}$
صفر	ع$_2$	750	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	1	صفر	$-\frac{13}{2}$
صفر	ع$_3$	250	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	صفر	1	$-\frac{7}{2}$
64	س$_1$	1250	1	صفر	$-\frac{1}{2}$	صفر	صفر	$\frac{5}{2}$
	ل ز	155000	64	100	18	صفر	صفر	10
	م ز – ل ز		صفر	صفر	18–	صفر	صفر	10–

وكانت القيود الأصلية لهذه المشكلة هى :

3 س$_1$ + 5 س$_2$ ≤ 7500 ← (المورد الأول)

5 س$_1$ + 4 س$_2$ ≤ 10000 ← (المورد الثانى)

2 س$_1$ + س$_2$ ≤ 3500 ← (المورد الثالث)

س$_1$ + س$_2$ ≤2000 ← (المورد الرابع)

المطلوب:

1- ما هو المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً ؟

2- ما هو المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً ؟

3- إذا زادت قيمة المورد الثالث بمقدار (500) وحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

4- ما هو مدى التغير فى الربح الذى يمكن أن يحدث بالنسبة للمتغير(س$_2$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو؟

الحــل

المطلوب الأول: تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً:

المورد الأول يعبر عنه المتغير العاطل ($ع_1$)

وتوجد طريقتين لتحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى):

الطريقة الأولى:

حتى يظل الحل الأمثل ممكناً فلابد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة نتيجة لحدوث التغير فى قيمة المورد الأول قيم غير سالبة بمعنى تكون ≤ صفر

قيم متغيرات الحل الجديدة

= = قيم متغيرات الحل الأصلية + Δ_1 (معاملات عمود $ع_1$ في جدول الحل الأمثل)

قيم متغيرات الحل الأصلية   معاملات $ع_1$

$$\begin{matrix} س_2 \\ ع_2 \\ ع_3 \\ س_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 750 \\ 750 \\ 250 \\ 1250 \end{bmatrix} + \Delta_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 750 + \frac{1}{2}\Delta_1 \geq \text{صفر} \\ 750 + \frac{1}{2}\Delta_1 \geq \text{صفر} \\ 250 + \frac{1}{2}\Delta_1 \geq \text{صفر} \\ 1250 - \frac{1}{2}\Delta_1 \geq \text{صفر} \end{matrix}$$

*** بالنسبة لـ $س_2$ نجد أن:**

$$750 + \frac{1}{2}\Delta_1 \geq \text{صفر}$$

$\therefore \frac{1}{2}\Delta_1 \geq -750$ بالضرب فى (2)

$\therefore \Delta_1 \geq -1500 \leftarrow (1)$

*** بالنسبة لـ $ع_2$ نجد أن:**

$$750 + \frac{1}{2}\Delta_1 \geq \text{صفر}$$

$\therefore \frac{1}{2}\Delta_1 \leq -750$ بالضرب فى 2

$\therefore \Delta_1 \leq -1500 \leftarrow (2)$

*** بالنسبة لـ ع$_3$ نجد أن:**

$250 + \frac{1}{2}\Delta_1 \leq$ صفر

$\therefore \frac{1}{2}\Delta_1 \leq -250$ بالضرب فى 2

$\therefore \Delta_1 \leq -500 \leftarrow (3)$

*** بالنسبة لـ س$_1$ نجد أن:**

$1250 - \frac{1}{2}\Delta_1 \leq$ صفر

$\therefore -\frac{1}{2}\Delta_1 \leq -1250$ بالضرب فى (2)

$\therefore -\Delta_1 \leq -2500$ بالضرب فى (-1) مع تغيير اشارة المتباينة.

$\therefore \Delta_1 \geq 2500 \leftarrow (4)$

من (1) ، (2) ، (3) ،(4) فإن:

$$-500 \geq \Delta_1 \geq 2500$$

$\therefore$ الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الأول = $7500 - 500 = 7000$ وحدة

$\therefore$الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الأول = $7500 + 2500 = 10000$ وحدة

أى أن قيمة المورد الأول يمكن أن تنخفض إلى (7000) وحدة وتزيد إلى (10000) وحدة دون أن يكون ذلك على الحل الأمثل وامكانيته.

الطريقة الثانية: لتحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً.

* المورد الأول يعبر عنه بالمتغير العاطل (ع$_1$) بمعنى أنه تم اضافة المتغير (ع$_1$) إلى معادلة القيد الأول.

لتحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) نكون الجدول التالى:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عمود قيم متغيرات الحل	عمود ($ع_1$)	عمود ($ع_1$) × 1−	عمود (1)÷ عمود (2)	عمود (1) ÷ عمود (3)
750	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1500	1500−
750	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1500	1500−
250	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	500	500−
1250	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2500 −	2500

∴ الحد الأدنى للتغير فى قيمة المورد الأول

= الكمية المتاحة من المورد الأول – أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (4)

= 7500 – 500 = 7000 وحدة

∴ الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الأول

= الكمية المتاحة من المورد الأول + أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (5)

= 7500 + 2500 = 10000 وحدة

لاحظ أن نتائج الطريقة الثانية هى نفس نتائج الطريقة الأولى.

المطلوب الثانى: تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً.

المورد الثالث يعبر عنه بالمتغير العاطل ($ع_3$) بمعنى أنه تم اضافة المتغير ($ع_3$) إلى معادلة القيد الثالث.

وحيث أن المتغير (ع3) ظهر ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل النهائى فيمكن حساب المدى (الحدين الأدنى والأعلى) لهذا المورد كما يلى:

* الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الثالث

= الكمية المتاحة من المورد الثالث – قيمة المتغير العاطل (ع3) فى عمود قيم متغيرات الحل

= 3500 − 250 = 3250 وحدة .

* الحد الأعلى للتغير في قيمة المورد الثالث = موجب مالا نهاية (+ ∞).

المطلوب الثالث: تحديد أثر زيادة قيمة المورد الثالث بمقدار (500) وحدة على امكانية الحل الأمثل:

نطبق القاعدة التالية:

[قيم متغيرات الحل بعد الزيادة] = [قيم الطرف الأيسر بعد الزيادة] [مصفوفة المتغيرات التى بدأنا بها جدول الحل المبدئى فى جدول الحل الأمثل]

$$\begin{bmatrix} 7500 \\ 10000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \text{صفر} & \text{صفر} & \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2} & \text{صفر} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 & \text{صفر} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \text{صفر} & \text{صفر} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}_2 \\ \text{ع}_2 \\ \text{ع}_3 \\ \text{س}_1 \end{bmatrix}$$

$$750 = [2000\times \frac{3}{2} - 4000 \times \text{صفر} + 10000 \times \text{صفر} + 7500 \times \frac{1}{2}] = \text{س}_2$$

$$750 = [2000\times \frac{13}{2} - 4000 \times \text{صفر} + 10000 \times 1 + 7500 \times \frac{1}{2}] = \text{ع}_2$$

$$ع_3 = [\frac{1}{2} \times 7500 + \text{صفر} \times 10000 + 1 \times 4000 - \frac{7}{2} \times 2000] = 750$$

$$س_1 = [\frac{1}{2} \times 7500 + \text{صفر} \times 10000 + \text{صفر} \times 4000 + \frac{5}{2} \times 2000] = 1250$$

لاحظ أن كل قيم متغيرات الحل الجديدة موجبة وهذا يعنى أن الحل الحالى حل ممكن.

قيمة الحل الجديد = (100 × 750) + (صفر × 750) + (صفر × 750) + (64 × 1250) = 155000 جنيه

لاحظ أن قيمة الحل لم تتغير بعد الزيادة فى المورد الثالث.

المطلوب الرابع: تحديد مدى التغير فى ربح الوحدة من المتغير (س$_2$) مع بقاء الحل الأمثل كما هو بدون تغيير:

حيث أن المتغير (س$_2$) ظهر من ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل، فيمكن تحديد مدى التغير فى ربح الوحدة من (س$_2$) كما يلى:

1- قسمة الأرقام الموجودة فى الصف الأخير (م $_ز$ – ل $_ز$) على الأرقام المقابلة فى صف المتغير (س$_2$) مع تجاهل جميع النسب التى تتضمن صفر فى المقام كما يلى:

صفر ÷ 1 = صفر ، $-18 \div \frac{1}{2} = -36$ ، $-10 \div -\frac{3}{2} = \frac{20}{3}$

2- اختيار أكبر قيمة سالبة من ناتج القسمة فى الخطوة (1) (أى أقرب رقم سالب إلى الصفر) فنجده (–36) ثم جمعها على معامل المتغير (س$_2$) فى دالة الهدف وهى (100)

∴ الحد الأدنى لمدى التغير فى ربح الوحدة من (س$_2$) فى دالة الهدف

= –36 + 100 = 64

3- اختيار أصغر قيمة موجبة من ناتج القسمة فى الخطوة (1) فنجدها ($\frac{20}{3}$) ثم جمعها على معامل المتغير (س$_2$) فى دالة الهدف وهى (100)

∴ الحد الأعلى لمدى التغير فى ربح الوحدة من (س$_2$) فى دالة الهدف

$$= \frac{20}{3} + 100 = 100\frac{20}{3}$$

وبالتالى فإن مدى التغير فى ربح الوحدة من (س$_2$) هو

$$64 \leq ر\ (س_2) \leq 100\frac{2}{3}$$

وهذا يعنى أن ربح الوحدة من المتغير (س$_2$) يمكن أن يزيد إلى $100\frac{2}{3}$(أى يزيد ربح الوحدة من (س$_2$) بمقدار ($\frac{2}{3}$) وتقل إلى (64) دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالى.

النمط الثالث: تحديد أثر التغير فى المعاملات الفنية لمتغيرات القيود (ثوابت الطرف الأيمن للقيود):

يوضح كل قيد من قيود نموذج البرمجة الخطية الكميات المتاحة من الموارد بالاضافة إلى الاحتياجات الفنية لكل وحدة من المنتجات التى تستخدم المورد (والتى تعرف بالمعاملات الفنية).

هذا وإن كان من المتعارف عليه أنه قد تم بناء نموذج البرمجة الخطية على افتراض ثبات هذه المعاملات الفنية، إلا أن الواقع العملى يؤكد صعوبة تحقيق هذا الافتراض حيث توجد الكثير من العوامل والأسباب التى تؤدى إلى تغير هذه المعاملات الفنية وعدم ثباتها وذلك مثل التقدم التكنولوجى المستمر، وتناقص القدرة الإنتاجية لوسائل الإنتاج مع مرور الزمن أو التقادم، واستخدام الطرق الإنتاجية المستحدثة، بالاضافة إلى التطور فى مهارات الموارد البشرية العاملة.

ويمكن حساب مدى التغير فى المعامل الفنى (الحدين الأدنى والأعلى) والتى تظل أسعار الظل صالحة فى حدودها وفقاً للقواعد التالية:

1- إذا كان الأمر يتعلق بأحد الموارد غير النادرة أى التى وردت فى جدول الحل الأمثل (عمود المتغيرات الأساسية) فإنه يتم تحديد الحد الأعلى لزيادة المعامل الفنى كما يلى:

أ- إذا كان المنتج أدرج فى الحل الأمثل:

الحد الأعلى = كمية المتغير العاطل غير المستخدمة ÷ عدد الوحدات المنتجة من كل منتج.

ب- إذا كان المنتج لم يدرج فى الحل الأمثل فإن الحد الأعلى للزيادة = موجب مالا نهاية (+ ∞).

ويلاحظ أنه فى حالة وجود مورد غير نادر فإنه يمكن انقاص المعاملات الفنية إلى مالا نهاية سواء بالنسبة للمنتجات التى وردت أو التى لم ترد ضمن الحل الأمثل، حيث أن ذلك الانقاص سيزيد من كمية المتغير العاطل فقط.

2- إذا كان الأمر يتعلق بأحد الموارد النادرة فإن:

أ- أقصى زيادة للمعامل الفنى لمنتج لم يدرج ضمن المتغيرات الأساسية تساوى موجب مالا نهاية (+ ∞) (نظراً لأن أى زيادة لا يترتب عليها تغيير الحل الأمثل).

ب- أقصى نقص فى المعامل الفنى لمنتج لم يدرج ضمن المتغيرات الأساسية

$$= \frac{\text{معامل المنتج فى الصف } (م_ز - ل_ز)}{\text{سعر ظل المورد}}$$

جـ- أقصى زيادة للمعامل الفنى لمنتج ورد ضمن المتغيرات الأساسية هى صفر، حيث أن أى زيادة فى معامل هذا المنتج سوف تجعل الحل غير ممكناً.

د- أقصى نقص فى المعامل الفنى لمنتج ورد ضمن المتغيرات الأساسية هى صفر وبالتالى لا يوجد نقص.

مثال (5): فيما يلى جدول الحل الأمثل النهائى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ز			11	6	2	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
6	$س_2$	200	صفر	1	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	صفر
11	$س_1$	300	1	صفر	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	صفر
صفر	$ع_3$	400	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1
	ل ز	4500	11	6	$\frac{29}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	صفر
	م ز – ل ز		صفر	صفر	$-\frac{25}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	صفر

وكانت القيود الأصلية لهذه المشكلة هى:

$5 س_1 + 3 س_2 + 7 س_3 \le 2100$

$4 س_1 + 2 س_2 + 5 س_3 \le 1600$

$3 س_1 + 2 س_2 + 4 س_3 \le 1700$

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ $\ge$ صفر

وكانت دالة الهدف هى:

عظم (ر) = $11 س_1 + 6 س_2 + 2 س_3$

المطلوب: أوجد مدى التغير فى المعامل الفنى لكل من ($س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$) فى القيود الثلاثة.

الحـــل

بالنظر إلى جدول الحل الأمثل يتضح ما يلى:

1- القيد الثالث فى النموذج الأصلى يتضمن متغير عاطل ($ع_3$) ضمن المتغيرات الأساسية وبالتالى يعبر القيد الثالث عن قيد مورد غير نادر. والقيد الثالث كان كما يلى بعد اضافة المتغير العاطل ($ع_3$).

$3 س_1 + 2 س_2 + 4 س_3 + ع_3 = 1700$

وطبقاً للحل الأمثل فإن: $س_1 = 300$، $س_2 = 200$ ، $س_3$ = صفر ، $ع_3 = 400$

لتحديد الحدين الأدنى والأعلى لتغير المعاملات الفنية للمورد الثالث (مورد غير نادر) يتم عمل الآتى:

* الحد الأعلى لزيادة المعامل الفنى للمنتجات التى أدرجت ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل

$$= \frac{\text{كمية المتغير العاطل } (ع_3) \text{ غير المستخدمة}}{\text{عدد الوحدات المنتجة من كل منتج}}$$

أقصى زيادة لمعامل ($س_1$) فى القيد الثالث

$= 400 \div 300 = 1.3$

أقصى زيادة لمعامل $س_2$ فى القيد الثالث

$= 400 \div 200 = 2$

أقصى زيادة لمعامل ($س_3$) فى القيد الثالث = موجب مالا نهاية (+ ∞)

(وذلك لأن ($س_3$) متغير غير أساسى).

* وكذلك يمكن تخفيض المعاملات الفنية لكل من ($س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$) فى القيد الثالث (مورد غير نادر) إلى موجب مالا نهاية (+ ∞).

2- القيدين الأول والثانى يشيران إلى موردين نادرين ويقضى القيدين المذكورين بما يلى:

$5 س_1 + 3 س_2 + 7 س_3 \leq 2100$ ← القيد الأول

$4 س_1 + 2 س_2 + 5 س_3 \leq 1600$ ← القيد الثانى

وطبقاً لجدول الحل الأمثل فإن ($س_1$) ، ($س_2$) متغيرات أساسية وتبلغ أسعار ظل الوحدة من المورد الأول = (1) ، وسعر ظل الوحدة من المورد الثانى = ($\frac{3}{2}$).

وبناءاً على ذلك نجد أقصى تخفيض وأقصى زيادة بالنسبة للمعاملات الفنية للمنتجين ($س_1$) ، ($س_2$) هى صفر.

وطبقاً لجدول الحل الأمثل فإن ($س_3$) متغير غير أساسى وبالتالى فإن:

* أقصى نقص لمعامل المتغير ($س_3$) من المورد الأول فيحسب وفقاً للمعادلة التالية:

$$= \frac{\text{معامل المنتج } (س_3) \text{ فى الصف } (م_ز - ل_ز)}{\text{سعر ظل المورد الأول}}$$

$$= -\frac{25}{2} \div 1 = -\frac{25}{2}$$

وبذلك يكون الحد الأدنى لمعامل ($س_3$) من المورد الأول هو:

$$7 - \frac{25}{2} = -\frac{11}{2} = (-\frac{1}{2}5) .$$

* أقصى نقص لمعامل المتغير ($س_3$) من المورد الثانى:

$$= -\frac{25}{2} \div \frac{3}{2} = (-\frac{25}{3})$$

وبذلك يكون الحد الأدنى لمعامل ($س_3$) من المورد الثانى هو:

$$5 - \frac{25}{3} = -\frac{10}{3} = (-\frac{1}{3}3)$$

أما أقصى زيادة لمعامل المتغير ($س_3$) من الموردين الأول والثانى فهى موجب مالا نهاية (+ ∞)

وبناءاً على ما تقدم تكون الحدود الدنيا والعليا للمعاملات الفنية للمتغير ($س_3$) من الموردين الأول والثانى كما يلى:

$(-\frac{1}{2}5)$ < معامل ($س_3$) من المورد الأول < (+ ∞)

$(-\frac{1}{3}3)$ < معامل ($س_3$) من المورد الثانى < (+ ∞)

النمط الرابع: تحد أثر اضافة قيد جديد إلى القيود الحالية لنموذج البرمجة الخطية:

قد تستجد بعض الظروف المحيطة بالمنظمة تضطرها إلى اضافة قيد جديد لم يكن وارداً فى حسبانها إلى نموذج البرمجة الخطية الأصلى، وكمثال لذلك تغير صفة بعض الموارد المتاحة لهذه المنظمة حيث قد تتحول بعض هذه الموارد من موارد متاحة ومتوفرة بحيث لا تمثل أى قيد على برنامج الإنتاج إلى موارد نادرة تمثل قيداً على هذا البرنامج ويتطلب الأمر ضرورة التحكم فيها واستغلالها استغلالاً كاملاً.

ويتوقف تأثير اضافة قيد جديد لأى مشكلة على كون القيد الجديد نشط أم غير نشط، حيث يتم تقسيم القيود إلى:

1- **قيود نشطة:** وهى التى تؤثر فى الحل الأمثل الحالى لنموذج البرمجة الخطية.

2- **قيود غير نشطة:** وهى التى لا تؤثر فى الحل الأمثل الحالى لنموذج البرمجة الخطية.

ويتم تحديد ما إذا كان القيد الجديد نشطاً أم غير نشط من خلال التعويض فى معادلة القيد محور الدراسة باستخدام نتائج الحل الأمثل (عمود قيم متغيرات الحل) أى الكميات المثلى التى تم التوصل إليها فى برنامج الحل الأمثل الأصلى.

فإذا تحقق الحل الأمثل فى ظل القيد الجديد ∴ القيد الجديد غير نشط.

إذا لم يتحقق الحل الأمثل فى ظل القيد الجديد ∴ القيد الجديد نشط.

فإذا فرض أن الكميات المثلى التى تم التوصل إليها فى برنامج الحل الأمثل الأصلى كانت كما يلى:

$س_1 = 500$ ، $س_2 = 600$ ، $س_3 = 100$

وكان القيد المطلوب اضافته هو:

$س_1 + س_2 + س_3 \le 1800$

بالتعويض عن الكميات المثلى فى القيد الجديد:

$500 + 600 + 100 \le 1800$

$1200 \le 1800$

∴ القيد الجديد لايؤثر على الحل الأمثل فهو قيد غير نشط.

أما إذا كان القيد المطلوب اضافته هو:

$2س_1 + س_2 + 3س_3 \le 1000$

بالتعويض بالكميات المثلى فى هذا القيد الجديد

$(2 \times 500) + (1 \times 600) + (3 \times 100) = 1000 + 600 + 300 =$

$1900 > 1000$

∴ الحل الأمثل يتأثر بالقيد الجديد ويعتبر قيد نشط يجب أن يؤخذ فى الحسبان وبيان أثره على الحل الأمثل.

مثال (6): فيما يلى جدول الحل الأمثل النهائى لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
4	$س_3$	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر
3	$س_1$	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر
صفر	$ع_3$	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
	ل ز	22	3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر
م ز – ل ز			صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر

المطلوب: حدد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق: $4س_1 + س_2 + 3س_3 \le 18$

الحـــل

*** تحديد ما إذا كان القيد الجديد نشط أم لا ؟**

بالتعويض عن الكميات المثلى التى تم التوصل إليها فى برنامج الحل الأمثل الأصلى وهى (س$_1$ = 2 ، س$_2$ = صفر ، س$_3$ = 4 فى القيد الجديد وذلك كما يلى:

(4 × 2) + صفر + (3 × 4) ≤ 18

$20 > 18$

ونظراً لأن الحل الحالى لا يحقق القيد الجديد بمعنى أن الحل الأمثل يتأثر بالقيد الجديد ويعتبر ذلك القيد قيد نشط. لذا فإن الأمر يتطلب إجراء التعديلات المطلوبة لبيان أثر القيد الجديد على الحل الأمثل الحالي وذلك باتباع الخطوات التالية:

1- تحويل القيد الجديد إلى معادلة (متساوية) باضافة المتغير العاطل (ع$_4$) كما يلى: 4 س$_1$ + س$_2$ + 3 س$_3$ + ع$_4$ = 18

2- اضافة صف القيد الجديد إلى جدول الحل الأمثل الأصلى كما يتضح من الجدول التالى:

م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
4	س$_3$	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر	صفر
3	س$_1$	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر	صفر
صفر	ع$_3$	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	صفر
صفر	ع$_4$	18	4	1	3	صفر	صفر	صفر	1
	ل ز	22	3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر	صفر
	م ز – ل ز		صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر	صفر

3- بفحص عمودى المتغيرين الأساسيين (س$_1$ ، س$_3$) بهذا الجدول نجد أنهما لا يحققان شرط متجه الوحدة (مصفوفة الوحدة) بسبب وجود بعض المعاملات الفنية الخاصة بالقيد الجديد، ولكى تستبعد هذه المعاملات الفنية من هذين العمودين فإنه يجب أن تصبح قيمة كل منهما = صفر تحت عمودى هذين المتغيرين (س$_1$ ، س$_3$) ، ولتحقيق ذلك فإن الأمر يتطلب ضرب صف المتغير (س$_1$) × -4 ، وضرب صف المتغير (س$_3$) × -3 ثم يتم جمع ناتج ضرب هذين الصفين على صف المتغير الأساسى العاطل (ع$_4$) ويظهر ذلك من خلال الجدول التالى:

البيان	قيم الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
صفر (س$_1$) × -4	-8	-4	$-\frac{4}{3}$	صفر	$\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{3}$	صفر	صفر
صف (س$_3$) × -3	-12	صفر	-1	-3	-2	1	صفر	صفر
مجموع الصفين	-20	-4	$-\frac{7}{3}$	-3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	صفر	صفر
+ صف (ع$_4$)	18	4	1	3	صفر	صفر	صفر	1
القيم الجديدة لصف (ع$_4$)	-2	صفر	$-\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	صفر	1

4- وفى ضوء ذلك فإن جدول الحل يظهر بعد اضافة القيم الجديدة لصف المتغير العاطل (ع$_4$) كما يلى:

م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
4	س$_3$	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر	صفر
3	س$_1$	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر	صفر
صفر	ع$_3$	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	صفر
صفر	ع$_4$	-2	صفر	$-\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	صفر	1
	ل ز	22	3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر	صفر
م ز – ل ز			صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر	صفر

5- يتضح من الجدول السابق أن جميع القيم فى الصف الأخير (م ز – ل ز) قيم سالبة أو صفرية وبالتالى فإن جدول الحل السابق هو جدول الحل الأمثل كما هو ولكن توجد قيمة سالبة (-2) فى عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير العاطل (ع$_4$) وهذا يشير إلى أن الحل الحالى على الرغم من مثاليته إلا أنه أصبح حل غير ممكن. الأمر الذى يتطلب ضرورة التخلص من هذه القيمة السالبة، ويمكن تحقيق ذلك باستخدام أسلوب الوجه الأخر من السمبلكس وذلك للتغلب على عدم امكانية الحل وذلك باتباع الخطوات التالية:

أ- تحديد المتغير الذى يترك الحل وهو المتغير صاحب أكبر قيمة أمامها إشارة سالبة فى عمود قيم متغيرات الحل وهنا هو المتغير العاطل (ع$_4$).

ب- تحديد المتغير الذى يدخل الحل ليحل محل المتغير الخارج (ع$_4$) فإن الأمر يتطلب حساب عملية القسمة التالية ثم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب.

القيم السالبة فى الصف الأخير (م ز – ل ز) تحت المتغيرات غير الأساسية ÷ المعاملات المقابلة السالبة فى صف المتغير الذى يترك الحل (ع$_4$)

*عند س$_2$: $-\frac{1}{3} \div -\frac{4}{3} = \frac{1}{4}$ ← صاحب أقل ناتج قسمة موجب

*عند ع$_1$: $-\frac{5}{3} \div -\frac{2}{3} = \frac{5}{2}$

*عند ع$_2$: $-\frac{2}{3} \div -\frac{5}{3} = \frac{2}{5}$

∴ المتغير (س$_2$) هو المتغير الذى يدخل الحل ويمكن حساب قيم الصف (س$_2$) فى الجدول الجديد بقسمة قيم الصف (ع$_4$) ÷ $-\frac{4}{3}$

وبالتال تتمثل قيم (س$_2$) فى الجدول الجديد فى:

($\frac{3}{2}$ ، صفر ، 1 ، صفر ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{4}$ ، صفر ، $-\frac{3}{4}$)

* قيم الصف (س$_3$) فى الجدول الجديد هى : ($\frac{7}{2}$ ، صفر ، صفر ، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، صفر ، $\frac{1}{4}$) .

* قيم الصف (س$_1$) فى الجدول الجديد هى: ($\frac{3}{2}$ ، 1، صفر ، صفر ، $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$، صفر ، $\frac{1}{4}$) .

* قيم الصف (ع$_3$) فى الجدول الجديد هى:

(1 ، صفر ، صفر ، صفر ، 1- ، 2- ، 1 ، 1)

وبالتالى يتمثل جدول الحل الجديد فيما يلى:

م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
4	س$_3$	$\frac{7}{2}$	صفر	صفر	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$
3	س$_1$	$\frac{3}{2}$	1	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$
صفر	ع$_3$	1	صفر	صفر	صفر	-1	-2	1	1
2	س$_2$	$\frac{3}{2}$	صفر	1	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	صفر	$-\frac{3}{4}$
	ل ز	$\frac{43}{2}$	3	2	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
	م ز − ل ز		صفر	صفر	صفر	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	صفر	$-\frac{1}{4}$

يمثل الجدول السابق جدول الحل الأمثل، وهو يوضح أنه قد ترتب على اضافة القيد الجديد إلى برنامج الحل الأصلى انخفاض قيمة دالة الهدف (مقدار ربح الحل) حيث بلغت $\frac{43}{2}$ أى (21.5) فى حين أنها كانت فى الحل الأمثل الأصلى (22) وبالتالى من الأفضل اتخاذ قرار بعدم اضافة القيد الجديد إلى برنامج الحل الأصلى.

تمارين علي الفصل الخامس

تمرين (1): فيما يلى دالة الهدف والقيود وجدول السمبلكس الأمثل لأحد مشاكل المزيج الإنتاجى:

عظم (ر) = 3 س$_1$ + 2 س$_2$

فى ظل:

4 س$_1$ + 3 س$_2$ ≤ 12 ← (المورد الأول)

4 س$_1$ + س$_2$ ≤ 8 ← (المورد الثانى)

4 س$_1$ − س$_2$ ≤ 8 ← (المورد الثالث)

وكان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة كما يلى:

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
م ز			3	2	صفر	صفر	صفر
2	س$_2$	2	صفر	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	صفر
3	س$_1$	$\frac{3}{2}$	1	صفر	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	صفر
صفر	ع$_3$	4	صفر	صفر	1	−2	1
	ل ز	$\frac{17}{2}$	3	2	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	صفر
	م ز − ل ز		صفر	صفر	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	صفر

المطلوب:

1− عمل الصياغة الثنائية فقط لهذه المشكلة.

2− تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.

3− تحديد المدى الذى يمكن ان تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.

4- إذا زادت قيمة المورد الأول بمقدار (2) وحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

5- إذا زادت قيمة المورد الثانى بمقدار وحدة واحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

6- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($ع_1$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

7- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_2$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

8- إذا فرض أن السوق لا يستوعب أكثر من (3) وحدات من ($س_2$) فهل سيؤثر هذا القيد الجديد على الحل الأمثل؟ ما هو الحل الجديد؟

9- إذا فرض أن السوق لا يستوعب أكثر من وحدة واحدة من ($س_1$) فهل سيؤثر هذا القيد الجديد على الحل الأمثل؟ ما هو الحل الجديد؟

تمرين (2): فيما يلى دالة الهدف والقيود وجدول السمبلكس الأمثل لأحد مشاكل المزيج الإنتاجى:

دالة الهدف عظم (ر) = 3 $س_1$ + $س_2$ + 3 $س_3$

فى ظل:

2 $س_1$ + $س_2$ + $س_3$ ≥ 2 ← المورد الأول

$س_1$ + 2 $س_2$ + 3 $س_3$ ≥ 5 ← المورد الثانى

2 $س_1$ + 2 $س_2$ + $س_3$ ≥ 6 ← المورد الثالث

$س_1$، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

وكان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة كما يلى:

م ز			3	1	3	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
3	$س_1$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	صفر	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	صفر
3	$س_3$	$\frac{5}{8}$	صفر	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	صفر
صفر	$ع_3$	4	صفر	1	صفر	-1	صفر	1
	ل ز	$\frac{27}{5}$	3	$\frac{12}{5}$	3	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	صفر
	م ز – ل ز		صفر	$-\frac{7}{5}$	صفر	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	صفر

المطلوب:

1- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.

2- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.

3- إذا زادت قيمة المورد الأول بمقدار وحدة واحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

4- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($ع_1$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

5- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_3$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

6- تحديد مدى التغير فى المعاملات الفنية لكل من ($س_1$) ، ($س_2$) ، ($س_3$).

7- إذا زادت قيمة المورد الثانى بمقدار (2) وحدة فهل يؤدى ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

8- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق: $س_1 + س_2 + س_3 \geq 2$

9- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق: 6 س$_1$ + 3 س$_2$ + 3 س$_3$ ≤ 5

تمرين (3): فيما يلى جدول السمبلكس الأمثل النهائى لإحدى مشكلات البرمجة الخطية:

م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
4	س$_3$	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر
3	س$_1$	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر
صفر	ع$_3$	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
	ل ز	22	3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر
	م ز – ل ز		صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر

وكانت دالة الهدف والقيود الأصلية للمشكلة كما يلى:

دالة الهدف عظم (ر) = 3 س$_1$ + 2 س$_2$ + 4 س$_3$

فى ظل:

س$_1$ + س$_2$ + 2 س$_3$ ≤ 10 ← المورد الأول

2 س$_1$ + س$_2$ + س$_3$ ≤ 8 ← المورد الثانى

س$_1$ + 2 س$_2$ + س$_3$ ≤ 9 ← المورد الثالث

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ≥ صفر

المطلوب:

1- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.

2- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.

3- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_1$) والذى يحافظ علي بقاء الحل الأمثل كما هو.

4- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_2$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

5- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($ع_1$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

6- تحديد مدى التغير فى المعاملات الفنية للمتغير ($س_2$) من المورد الأول والثانى.

7- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق: $4 س_1 + س_2 + 3 س_3 \geq 18$

تمرين (4): فيما يلى دالة الهدف والقيود وجدول السمبكس الأمثل لأحد مشاكل المزيج الإنتاجى:

عظم (ر) = $50 س_1 + 40 س_2$

فى ظل:

$3 س_1 + 5 س_2 \geq 150$ ← المورد الأول

$س_2 \geq 20$ ← المورد الثانى

$8 س_1 + 5 س_2 \geq 300$ ← المورد الثالث

$س_1 ، س_2 \leq$ صفر

جدول الحل الأمثل

م ز			50	40	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
40	$س_2$	12	صفر	1	$\frac{8}{25}$	صفر	$-\frac{3}{25}$
صفر	$ع_2$	8	صفر	صفر	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$
50	$س_1$	30	1	صفر	$-\frac{5}{25}$	صفر	$\frac{5}{25}$
	ل ز	1980	50	40	$\frac{14}{5}$	صفر	$\frac{26}{5}$
	م ز – ل ز		صفر	صفر	$-\frac{14}{5}$	صفر	$-\frac{26}{5}$

المطلوب:

1- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_1$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

2- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_2$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

3- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.

4- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.

تمرين (5): إذا توفر لديك نموذج البرمجة الخطية التالى:

عظم (ر) = 5 $س_1$ + 3 $س_2$ + 6 $س_3$

فى ظل:

$س_1$ + $س_2$ + $س_3$ ≤ 24

2 $س_1$ + $س_2$ + 2 $س_3$ ≤20

$س_1$ + 2 $س_2$ + $س_3$ ≤ 22

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

المطلوب:

1- التوصل لبرنامج الحل الأمثل لهذا النموذج.

2- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_1$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

3- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير ($س_2$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

4- تحديد مدى التغير فى كل مورد من الموارد المتاحة بقيود النموذج.

5- تحديد مدى التغير فى المعاملات الفنية لكل من $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$.

6- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق: $4 س_1 + 2 س_2 + 2 س_3 \leq 20$

تمرين (6): إذا كان النموذج الرياضى لإحدى مشكلات البرمجة الخطية كما يلى:

عظم (ر) = $2 س_1 + 4 س_2 + 5 س_3$

فى ظل:

$س_1 + س_2 + 3 س_3 \leq 48$

$3 س_1 + س_2 + 3 س_3 \leq 24$

$س_1 + 3 س_2 + س_3 \leq 32$

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ≤ صفر

المطلوب:

1- التوصل إلى برنامج الحل الأمثل لهذا النموذج.

2- تحديد مدى التغير فى ربح كل من المتغير ($س_1$) ، ($س_2$) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

3- تحديد مدى التغير فى كل مورد من الموارد المتاحة بقيود النموذج.

4- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق: 4 $س_1$ + 2 $س_2$ + 2 $س_3$ $\leq$ 40

الفصل السادس

تحليل سلاسل ماركوف

Markov Chains Analysis

- مقدمة.
- الشروط الواجب توافرها عند استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف.
- مستويات التحليل في سلاسل ماركوف.
- تطبيقات سلاسل ماركوف فى اتخاذ القرارت الإدارية.
- محاور تطبيق تحليل سلاسل ماركوف.
- استخدام تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات قادمة.
- استخدام أسلوب تحليل ماركوف فى إدارة الديون (حالة الاحتواء).
- تمارين للتدريب.

تحليل سلاسل ماركوف

مقدمة:

تحليل سلاسل ماركوف هى إحدى أساليب بحوث العمليات التى تبحث فى تحليل التغيرات الحالية لمتغير عشوائى وذلك بهدف التنبؤ بالتغيرات المستقبلية لهذا المتغير. وفى ضوء ذلك فإن هذا الأسلوب هو أحد الأساليب الرياضية الذى يستخدم لوصف (لتحليل) أى عملية يحدث فيها تغييرات متتالية فى مواقف معينة بحكم قوانين الاحتمالات، سواء كانت المتغيرات عشوائية أو على فترات محددة، كمحاولة للتنبؤ بالتحركات أو التغيرات التالية لهذا التغير نفسه.

وفى ضوء ذلك فإن أسلوب تحليل سلاسل ماركوف يعتمد فى التحليل على أن سلوك المتغير فى فترة مستقبلية إنما يتحدد فى ضوء سلوكه فى الفترة السابقة مباشرة لهذه الفترة، فإذا أمكن تصوير تحليل للموقف السابق مباشرة فإنه يمكن استخدام هذا التصوير فى التوقع الرياض لسلوك المتغير مستقبلاً.

ويتم النظر إلى العمليات التصادفية والتى تعرف بعمليات ماركوف باعتبارها سلسلة من الحالات التى تمر بها ظاهرة ما خلال فترة زمنية معينة، أو يتم النظر إليها باعتبارها سلسلة المواقع التى يمر بها جسم متحرك خلال فترات زمنية مختلفة تعرف بسلاسل ماركوف Markov Chains .

وتقوم سلاسل ماركوف على اعتبار أساسى يتمثل فى أن الظاهرة أو الجسم موضع الدراسة ينتقل من حالة إلى حالة أخرى استناداً إلى قوانين احتمالية تعرف بالاحتمالات الانتقالية، وهى تمثل احتمالات الانتقال من حالة إلى أخرى خلال فترة زمنية معينة. كما أنه إذا تم استخدام هذه الاحتمالات الانتقالية فى التنبؤ لفترات طويلة فى المستقبل، فإننا نكون بصدد ما أطلق عليه وضع التوازن والتى بمقتضاه تتجه الأرقام نحو الاستقرار والثبات.

هذا ويحمل اسم أسلوب تحليل سلاسل ماركوف اسم مبتكر ومخترع هذا الأسلوب وهو العالم " ماركوف " والذى قدمة فى عالم 1907 ، حيث استخدمه

فى البداية لدراسة حركة جزيئات غاز فى إناء مغلق والتنبؤ بحركة هذه الجزيئات فى المستقبل. وعند استخدام تحليل سلاسل ماركوف يجب:

أولاً: معرفة الحالة الحالية وهى أخر حدث تم فى الفترة السابقة مباشرة.

ثانياً: معرفة التحركات الاحتمالية والتى هى عبارة عن احتمالات التحرك أو التغير بين الحالات الممكنة.

الشروط الواجب توافرها عند استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف:

يتطلب استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف توفر بعض الشروط الأساسية والتى تعد بمثابة افتراضات أساسية عند تطبيقه فى اتخاذ القرارات، وتتمثل أهم هذه الشروط فيما يلى:

1- أن هناك عدد محدد ونهائى من المواقف أو الحالات الممكنة.

2- أن سلوك المتغير فى المستقبل يتحدد بناءاً على سلوكة فى الفترة السابقة لهذا المستقبل مباشرة.

3- أن الفترة الزمنية للتنبؤ تكون فى المدى القصير أو المتوسط.

4- أن التغير الذى يحدث فى البيانات من فترة إلى أخرى يمكن توفيرها خلال الفترة الزمنية المحددة للتنبؤ.

5- أن احتمالات تغير الموقف من وقت لآخر تظل كما هى ثابتة دون تغيير، أى أن احتمالات التغير من الفترة (ن) إلى الفترة (ن + 1) هى نفس الاحتمالات الخاصة بالتغير من الفترة (ن + 1) إلى الفترة (ن+ 2)...... وهكذا.... .

6- أنه يمكن التنبؤ بأى موقف فى المستقبل من خلال مصفوفة احتمالات التنقل وأيضاً من خلال المعرفة بالموقف الحالى.

7- أن حجم البيانات (أو مكونات النظام) يظل ثابتاً ولا يتغير خلال الفترة الزمنية.

مستويات التحليل فى سلاسل ماركوف:

يوجد ثلاثة مستويات أساسية للتحليل فى سلاسل ماركوف وتتوقف تلك المستويات على عدد الفترات التى يتم فيها تسجيل سلوك الحدث أو المتغير فى الماضى، وتتمثل تلك المستويات فيما يلى:

المستوى الأول: مبنى على افتراض أن احتمال الحدث التالى يتوقف تماماً على نتائج الحدث السابق مباشرة (المستهلك الذى اشترى علامة تجارية معينه يعتمد قراره بشراء هذه العلامة مرة أخرى على نتيجة قراره السابق مباشرة).

المستوى الثانى: يقوم على افتراض أن احتمال الحدث فى الفترة القادمة يعتمد على نتائج الحدثين السابقين له مباشرة. بمعنى افتراض أنه يتم التنبؤ لفترة قادمة من خلال الاعتماد على بيانات فترتين سابقتين لها مباشرة (قرار المستهلك بالشراء فى الشهر القادم يتوقف على نتائج شراؤه فى الشهرين السابقين).

المستوى الثالث: يستند هذا المستوى إلى افتراض أن السلوك المستقبلى للظاهرة يمكن التنبؤ به بدراسة سلوكها فى الفترات الزمنية الثلاث السابقة على الفترة موضع التنبؤ. بمعنى أنه يمكن التنبؤ لفترة قادمة اعتماداً على بيانات ثلاث فترات سابقة لها مباشرة.

تطبيقات سلاسل ماركوف فى اتخاذ القرارات الإدارية:

تم استخدام تحليل سلاسل ماركوف فى اتخاذ القرارات فى العديد من المجالات الإدارية ومنها:

1- تحليل نصيب الحصص التسويقية للمنظمات من حيث الزيادة والنقصان، وفحص سلوك العملاء والتنبؤ بولائهم لعلامة تجارية معينة وتحولهم إلى علامة تجارية أخرى خلال الزمن.

2- تحديد مدى تعطل آله معينه أم لا فى المستقبل والآلات التى تتعرض للتوقف بسبب العطل، وتحديد عدد الآلات التى تعمل طبقاً للعمليات الإنتاجية، وكذلك تحديد عدد الآلات التى تحتاج لإجراء صيانة دورية، بالاضافة إلى تحديد تركيبة العمال فى قسم إنتاجى معين وذلك فى نهاية فترة زمنية محددة.

3- تحرك المواد التى تتحرك على محطات التشغيل فى خط الإنتاج ويعاد إرجاعها إلى محطات سابقة من خلال هذا الخط بسبب عيوب التصنيع.

4- مستويات المخزون التى تتعرض للتغير.

5- القرارات المالية الخاصة بتحديد مصادر التمويل فى نهاية فترة زمنية معينة.

6- التنبؤ باعداد القوى العاملة المطلوبة للعمل خلال فترة زمنية معينة.

7- أسلوب التوزيع الحالى المستخدم بواسطة منظمة معينة.

محاور تطبيق تحليل سلاسل ماركوف:

تبدأ عمليات تحليل سلاسل ماركوف بافتراض أساسى وهو أن النظام الذى نتعامل معه يبدأ بحالة مبدئية أولية مثلاً حالة شركة تمتلك مصنعين نصيب كل منها فى السوق 30% ، 70% من مبيعات السوق على التوالى، من الممكن أن يتغير نصيب كل منها بعد عدة أشهر إلى 40% ، 60% على التوالى، وبعد ذلك نحدد احتمال تغير النظام من موقف إلى آخر أو من حالة إلى آخرى، ثم نقوم بجمع هذه الاحتمالات فى مصفوفة تسمى مصفوفة احتمالات التنقل التى تبين إمكانية تحويل النظام من نقطة إلى أخرى، وبذلك يمكن التنبؤ بالحالات المستقبلية للنظام.

ويمكن تناول دراسة سلاسل ماركوف من خلال ثلاث محاور وهى:

1- المواقف المتوقعة (المحتملة) واحتمالات حدوثها.

2- مصفوفة احتمالات التنقل.

3- التنبؤ باحتمالات الحالات فى المستقبل.

وفيما يلى نتناول هذه المحاور الثلاثة بالتفصيل:

1- المواقف المتوقعة (المحتملة) واحتمالات حدوثها:

إن مصطلح الموقف أو الحالة يستخدم لتحديد كافة الظروف الممكنة الخاصة بعملية ما أو نظاماً ما. ونقوم باستخدام الحالات لتحديد الظروف المحتملة لنظام معين، فمثلاً إذا كانت هناك آلة معينة فإنها يمكن أن توجد فى أحد موقفين فى أى وقت من الأوقات، فهى إما تكون فى حالة التشغيل الجيدة أو أن تكون فى حالة التشغيل السيئة. وهكذا فإذا كان هناك عميل أمامه ثلاثة متاجر فى المنطقة التى يقطنها، فإن هذا العميل سيكون عميلاً لأحد هذه المتاجر فى أى فترة زمنية معينة، وبناء عليه فهناك ثلاث مواقف تختص بالمتاجر الثلاثة.

وبعد القيام بتحديد المواقف المحتملة تكون الخطوة التالية هى تحديد احتمال وجود النظام فى موقف معين من هذه المواقف، ويتم وضع هذه الاحتمالات فيما يعرف "متجه احتمالات الموقف". فإذا فرضنا أن: ت (م) = متجه احتمالات الموقف فى الزمن (م) فإن

ت (م) = (ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$ ... ت $_ن$)

حيث (ن) = عدد المواقف

م$_1$ ، م$_2$ ، ... م ن = احتمال وجود النظام فى الموقف (1) أو الموقف (2) أو الموقف (3) ... إلى الموقف (ن).

فمثلاً: إذا كنا نتعامل مع شئ واحد مثل آله واحدة، فإنه يكون من السهل أن نحدد بدرجة تأكد تام فى أى موقف ستكون هذه الآله ومعرفة ما إذا كانت هذه الآلة تعمل بشكل جيد أم لا. فإن عرفنا أن الآله تعمل بشكل جيد الآن فإن متجه احتمالات الموقف يصبح :

ت (1) = (1 ، صفر)

حيث:

ت (1) = متجه مواقف الآله فى الفترة الزمنية (1).

ت$_1$ = 1 = احتمال وجود آلة فى الموقف الأول (الآلة تعمل بشكل جيد).

ت$_2$ = صفر = احتمال وجود الآلة فى الموقف الثانى (الآلة تعمل بشكل سيئ).

أى أن احتمال أن الآلة تعمل بشكل جيد وأن قيمة هذا الموقف الأول = 1 وأن احتمال أن الآلة تعمل بشكل سيئ وأن قيمة هذا الموقف الثانى = صفر

أما إذا عرفنا أن الآلة تعمل بشكل سيئ الآن، فإنه متجه احتمالات الموقف يصبح:

ت (1) = (صفر ، 1)

حيث: ت (1) = متجه مواقف الآلة فى الفترة الزمنية (1) .

ت$_1$ = صفر = احتمال وجود الآلة فى الموقف الأول (الآلة تعمل بشكل جيد).

ت$_2$ = 1 = احتمال وجود الآله فى الموقف الثانى (الآله تعمل بشكل سيئ.

وإذا كنا نتعامل مع حالة فيها أكثر من شئ أو عنصر فى وقت واحد، مثلاً هناك ثلاث متاجر فى منطقة معينة من الإسكندرية، وأن عدد العملاء الذين يترددون على هذه المتاجر فى أى شهر = 600000 عميل ، ويقدر عدد العملاء الذين يشترون من المتجر الأول 300000 عميل ، وسوف نطلق على هذه الحالة الموقف (1). بينما يقدر عدد العملاء الذين يشترون من المتجر الثانى 180000 عميل وسوف نطلق على هذه الحالة الموقف (2). وأخيراً يقدر عدد العملاء الذين يشترون من المتجر الثالث 120000 عميل وسوف نطلق على هذه الحالة الموقف (3). وبالتالى فإن احتمالات قيام عميل ما بالتسوق فى واحد من هذه المتاجر الثلاثة كالتالى:

الموقف (1): المتجر الأول = 300000 ÷ 600000 = 50%

الموقف (2): المتجر الثانى = 180000 ÷ 600000 = 30%

الموقف (3): المتجر الثالث = 120000 ÷ 600000 = 20%

وبالتالى فإنه يمكننا وضع الاحتمالات السابقة فى شكل متجه احتمالات الموقف كما يلى:

ت (1) = (0.50 ، 0.30 ، 0.20)

حيث أن:

ت (1) = متجه احتمالات الموقف للمتاجر الثلاثة فى الفترة الأولى

$ت_1$ = 0.50 = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الأول (الموقف1)

$ت_2$ = 0.30 = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثانى (الموقف 2)

$ت_3$ = 0.20 = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثالث (الموقف3)

ويلاحظ أن الاحتمالات التى توجد داخل المتجه هى احتمالات تمثل أيضاً حصة كل متجر فى السوق، حيث يبلغ نصيب المتجر الأول (50%) من السوق، والمتجر الثانى يحصل على (30%) من السوق، والمتجر الثالث يحصل على (20%) من السوق.

وبالتالى فإن الموقف المبدئى فى هذه الحالة يتمثل فى :

ت (1) = (0.50 ، 0.30 ، 0.20)

وتكون الخطوة التالية هى ايجاد مصفوفة احتمالات التنقل حتى يمكن التنبؤ بحصة تلك المتاجر الثلاثة فى المستقبل.

2- مصفوفة احتمالات التنقل:

تمثل مصفوفة احتمالات التنقل احتمالات التحرك لمتغير ما داخل عدة بدائل. ومصفوفة احتمالات التنقل هى عبارة عن مجموعة من الاحتمالات

المشروطة لوجود المتغير فى موقف ما فى المستقبل مع الأخذ فى الاعتبار الموقف الحالى الذى يوجد فيه هذا المتغير.

وهذه المصفوفة هى مصفوفة مربعة أى عدد صفوفها = عدد أعمدتها، كما أن مجموع الاحتمالات لأى صف فى هذه المصفوفة يساوى واحد صحيح.

فمثلاً: إذا افترضنا ح $_{جـ د}$ = احتمال أن يكون الحدث فى الحالة (جـ) فى المستقبل بشرط وجود الآن فى الحالة الحاليه (د) .

فمثلاً: ح$_{21}$ = احتمال أن يكون الحدث فى الحالة الأولى بعد أن كان فى الحالة الثانية فى الفترة السابقة.

ويمكن تعريف مصفوفة احتمالات التنقل كالتالى:

إذا افترضنا ان ح = مصفوفة احتمالات التنقل:

ح =	ح11	ح12	ح13	ح ن1
	ح21	ح22	ح23	ح ن2
	ح31	ح32	ح33	ح ن3

فإذا حددنا مصفوفة احتمالات التنقل للمتاجر الثلاثة كما يلى:

	المتجر الأول	المتجر الثانى	المتجر الثالث
المتجر الأول	0.75	0.10	0.15
المتجر الثانى	0.05	0.90	0.05
المتجر الثالث	0.10	0.10	0.80

وباستخدام مفهوم المواقف فإن هذه الاحتمالات يمكن التعبير عنها كما يلى:

يعبر الموقف (1) عن احتمال أن يشترى العميل من المتجر الأول، ويعبر الموقف (2) عن احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثانى، وأخيراً يعبر الموقف (3) عن احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثالث.

- **الصف الأول:**

0.75 = $ح_{11}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الأول بعد كونه اشترى من المتجر الأول فى الفترة السابقة.

0.10 = $ح_{12}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثانى بعد كونه اشترى من المتجر الأول فى الفترة السابقة.

0.15 = $ح_{13}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثالث بعد كونه اشترى من المتجر الأول فى الفترة السابقة.

لاحظ أيضا أن مجموع الاحتمالات فى الصف الأول = واحد صحيح

- **الصف الثانى:**

0.05 = $ح_{21}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الأول بعد كونه اشترى من المتجر الثانى فى الفترة السابقة.

0.90 = $ح_{22}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثانى بعد كونه اشترى من المتجر الثانى فى الفترة السابقة.

0.05 = $ح_{23}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثالث بعد كونه اشترى من المتجر الثانى فى الفترة السابقة.

لاحظ أيضاً أن مجموع الاحتمالات فى الصف الثانى = واحد صحيح

- **الصف الثالث:**

0.10 = $ح_{31}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الأول بعد كونه اشترى من المتجر الثالث فى الفترة السابقة.

0.10 = $ح_{32}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثانى بعد كونه اشترى من المتجر الثالث فى الفترة السابقة.

0.80 = $ح_{33}$ = احتمال أن يشترى العميل من المتجر الثالث بعد كونه اشترى من المتجر الثالث فى الفترة السابقة.

لاحظ كذلك أن مجموع الاحتمالات فى الصف الثالث = واحد صحيح.

* وبعد أن تم تحديد متجه احتمالات المواقف، ومصفوفة احتمالات التنقل يمكن التنبؤ باحتمالات المواقف فى المستقبل كما يلى:

إذا كنا فى أى فترة زمنية ولتكن (ن) فإنه يمكننا حساب احتمالات الموقف فى الفترة (ن +1) باستخدام المعادلة التالية:

ت (ن + 1) = ت (ن) ح

أما بالنسبة لمثال المتاجر الثلاثة السابقة فإنه يمكننا حساب حصة السوق للمتاجر الثلاثة فى الفترة القادمة (الفترة الثانية) باستخدام المعادلة:

ت (2) = ت(1) ح

حيث ت (1) = متجه احتمالات الموقف (الموقف المبدئى)

ت(1) = (0.50 ، 0.30 ، 0.20)

ح = مصفوفة احتمالات التنقل. وعليه فإن

متجه ت (2) = ت(1) × ح

$$= (0.50 ، 0.30 ، 0.20) \begin{bmatrix} 0.75 & 0.10 & 0.15 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$(0.50 \times 0.75) + (0.30 \times 0.05) + (0.20 \times 0.10) = 0.41$$

$$(0.50 \times 0.10) + (0.30 \times 0.90) + (0.20 \times 0.10) = 0.34$$

$$(0.50 \times 0.15) + (0.30 \times 0.05) + (0.20 \times 0.80) = 0.25$$

∴ متجه ت (2) = (0.41 ، 0.34 ، 0.25)

ويلاحظ من النتيجة النهائية للتنبؤ بحصص المتاجر الثلاثة فى الفترة القادمة أن:

* حصة السوق للمتجر الأول قد انخفضت من (50%) إلى (41%).

* حصة السوق للمتجر الثانى قد زادت من (30%) إلى (34%).

* حصة السوق للمتجر الثالث قد زادت من (20%) إلى (25%).

مثال (2): حدد حصة كل متجر من المتاجر الثلاثة فى الفترة التى تلى الفترة القادمة مستخدماً نفس بيانات المثال رقم (1).

الحـــل

المطلوب هو التنبؤ بحصص المتاجر الثلاثة فى الفترة (ن +2) أى أننا نريد حساب متجه ت(3) حيث متجه ت (3) = ت(2) × ح

متجه ت (3) = ت(2) × ح

$$= (0.41 \text{ ، } 0.34 \text{ ، } 0.25) \begin{bmatrix} 0.75 & 0.10 & 0.15 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$(0.41 \times 0.75) + (0.34 \times 0.05) + (0.25 \times 0.10) = 0.3495$$

$$(0.41 \times 0.10) + (0.34 \times 0.90) + (0.25 \times 0.10) = 0.372$$

$$(0.41 \times 0.15) + (0.34 \times 0.05) + (0.25 \times 0.80) = 0.2785$$

∴ متجه ت (3) = (0.3495 ، 0.372 ، 0.2785)

ويلاحظ من النتيجة النهائية للتنبؤ بحصص المتاجر الثلاثة فى الفترة التى تلى الفترة القادمة أن:

* حصة السوق للمتجر الأول قد انخفضت من (41%) إلى (34.95%).
* حصة السوق للمتجر الثانى قد زادت من (34%) إلى (37.2%).
* حصة السوق للمتجر الثالث قد زادت من (25%) إلى (27.85%).

مثال(3): تنتج ثلاث شركات ثلاثة منتجات متشابهة (أ ، ب ، ج) ويوضح الجدول التالى الحركة التفصيلية لتحرك العملاء من استهلاك منتج إلى استهلاك منتج آخر:

المنتجات	عدد العملاء فى أول ديسمبر 2016	العملاء المكتسبين من			العملاء المفقودين إلى			عدد العملاء فى يناير 2017
		أ	ب	جـ	أ	ب	جـ	
أ	1250	-	125	50	-	225	75	1125
ب	3900	225	-	50	125	-	75	3975
جـ	1800	75	75	-	50	50	-	1850

فإذا علمت أنه لم يستجد عملاء جدد خلال الفترة، كما أنه لم يترك السوق أحد من العملاء القدامى.

المطلوب:

1- تفسير البيانات الواردة فى الجدول السابق.

2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل بين المنتجات الثلاثة.

3- التنبؤ بنصيب كل منتج من المنتجات الثلاثة من السوق فى أول فبراير (2017).

الحــــل

1- تفسير البيانات الواردة بالجدول السابق:

يتضمن هذا التفسير ما يلى:

* يبلغ عدد العملاء الذين يشترون المنتج (أ) (1250) عميل فى أول ديسمبر (2016)، وقد تحول إلى شراء هذا المنتج كمكسب له (125) عميل من عملاء المنتج (ب)، و(50) عميل من عملاء المنتج (جـ)، كما تحول عن شراء المنتج (أ) (225) عميلاً خسرهم لصالح المنتج (ب) ، و (75) خسرهم لصالح المنتج (جـ)، وبالتالى انخفض عدد عملاء المنتج (أ) ليصبح (1125) عميلاً فى أول يناير (2017).

[1250 + (125+ 50) − (225 +75) = (1125) عميل.

* يبلغ عدد العملاء الذين يشترون المنتج (ب) (3900) عميل فى أول ديسمبر (2016)، وقد تحول إلى شراء هذا المنتج كمكسب له (225) عميل

من عملاء المنتج (أ) ، و(50) عميل من عملاء المنتج (جـ)، كما تحول عن شراء المنتج (ب) (125) عميلاً خسرهم لصالح المنتج (أ) ، و(75) عميلاً خسرهم لصالح المنتج (جـ)، وبذلك فقد زاد عدد عملاء المنتج (ب) ليصبح (3975) عميلاً فى أول يناير (2017)

[3900 + (225 + 50) – (125 + 75) = (3975) عميل.

* يبلغ عدد العملاء الذين يشترون المنتج (ج) (1800) عميل فى أول ديسمبر (2016)، وقد تحول إلى شراء هذا المنتج كمكسب له (75) عميل من عملاء المنتج (أ)، و(75) من عملاء المنتج (ب)، كما تحول عن شراء المنتج (جـ) (50) عميل خسرهم لصالح المنتج (أ)، و(50) عميل خسرهم لصالح المنتج (ب)، وبذلك فقد زاد عدد عملاء المنتج (جـ) ليصبح (1850) عميلاً فى أول يناير (2017)

[1800 + (75 + 75) – (50 + 50) = (1850) عميل.

2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل:

يجب الأخذ فى الحسبان عند اعداد مصفوفة احتمالات التنقل ما يلى:

* تمثل الصفوف فى مصفوفة احتمالات التنقل احتمال احتفاظ كل منتج بعملائه واحتمال فقد كل منتج لعملائه إلى المنتجين المتنافسين.

* تمثل الأعمدة فى مصفوفة احتمالات التنقل احتمال احتفاظ كل منتج بعملائه واحتمال كسب كل منتج لعملاء جدد من المنتجين المتنافسين.

ويتم حساب:

احتمال احتفاظ المنتج بعملائه = $\dfrac{\text{عدد العملاء أول الفترة – عدد العملاء المفقودين}}{\text{عدد العملاء أول الفترة}}$

احتمال فقد المنتج لعملائه = $\dfrac{\text{عدد العملاء المفقودين إلى منتج معين}}{\text{عدد العملاء أول الفترة}}$

(1) حساب احتمال احتفاظ كل منتج بعملائه:

المنتج (أ) =

$$0.76 = \frac{950}{1250} = \frac{(75 + 225) - 1250}{1250}$$

المنتج (ب) =

$$0.948 = \frac{3700}{3900} = \frac{(75 + 125) - 3900}{3900}$$

المنتج (ج) =

$$0.944 = \frac{1700}{1800} = \frac{(50 + 50) - 1800}{1800}$$

(2) احتمال فقد كل منتج لعملائه إلى المنتجين المتنافسين:

*** من المنتج (أ)**

إلى المنتج (ب) =

$$0.18 = \frac{225}{1250}$$

إلى المنتج (جـ) =

$$0.06 = \frac{75}{1250}$$

*** من المنتج (ب)**

إلى المنتج (أ) =

$$0.032 = \frac{125}{3900}$$

إلى المنتج (جـ) =

$$0.020 = \frac{75}{3900}$$

*** من المنتج (جـ)**

إلى المنتج (أ) = $\frac{50}{1800} = 0.028$

إلى المنتج (ب) = $\frac{50}{1800} = 0.028$

وبناء على ما سبق تأخذ مصفوفة احتمالات التنقل الشكل التالى:

	أ	ب	جـ
أ	0.76	0.18	0.06
ب	0.032	0.948	0.020
جـ	0.028	0.028	0.944

*** تحديد متجة احتمالات المواقف (الموقف المبدئى):**

تحديد نصيب كل منتج من المنتجات الثلاثة من السوق فى بداية الفترة:

نصيب المنتج من السوق = $\frac{\text{عدد عملاء المنتج فى بداية الفترة}}{\text{إجمالى عدد العملاء فى السوق فى بداية الفترة}}$

إجمالى عدد العملاء في السوق فى بداية الفترة =

(1250 + 3900 + 1800) = 6950 عميل

نصيب المنتج (أ) = $\frac{1250}{6950} = 0.18$

نصيب المنتج (ب) = $\frac{3900}{6950} = 0.56$

نصيب المنتج (جـ) = $\frac{1800}{6950}$ = 0.26

∴ متجة احتمالات المواقف (الموقف المبدئى)

ت (1) = (0.18 ، 0.56 ، 0.26)

3- التنبؤ بنصيب كل منتج من المنتجات الثلاثة من السوق فى أول فبراير (2017) ← يعنى فى الفترة القادمة (ن +1) أى أننا نريد حساب متجه ت(2) حيث متجه ت (2) = ت(1) × ح

∴ ت (2) = ت(1) × ح

$$= (0.18 ، 0.56 ، 0.26) \begin{bmatrix} 0.76 & 0.18 & 0.06 \\ 0.032 & 0.948 & 0.020 \\ 0.028 & 0.028 & 0.944 \end{bmatrix}$$

(0.18× 0.76) + (0.56 × 0.032) + (0.26 × 0.028) =0.162

(0.18 × 0.18) + (0.56 × 0.948) + (0.26 × 0.028)

= 0.57056

(0.18 × 0.06) + (0.56 × 0.020) + (0.26 × 0.944)

= 0.26744

∴ متجه ت (2)= (0.162 ، 0.57056 ، 0.26744)

* يلاحظ من التنبؤ بنصيب المنتجات الثلاثة من السوق فى أول فبراير (2017) ما يلى:

* نصيب المنتج (أ) من السوق قد انخفض من (18%) إلى (16.2%).
* نصيب المنتج (ب) من السوق قد زاد من (56%) إلى (57.056%).
* نصيب المنتج (جـ) من السوق قد زاد من (26%) إلى (26.744%).

استخدام تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات قادمة:

يمكن استخدام تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات قادمة وذلك بافتراض أن هذه الآلات يمكن أن تكون فى إحدى حالتين وهما: **الحالة الأولى:** الآلة تعمل بشكل جيد، **والحالة الثانية:** الآلة تعمل بشكل سيئ. هذا ويمكن الاستفادة من ذلك فى ترشيد قرارات تحديد جدولة العمليات الإنتاجية ومراقبتها، الأمر الذى يؤدى إلى تحقيق أقصى استفادة ممكنة من الطاقة الآلية المتاحة بالمنظمة.

ويوضح المثال التالى كيفية استخدام تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات زمنية قادمة.

مثال (4): بفرض أن أحد الأفراد لدية آلة معينة، وقد لاحظ هذا الفرد أن الآلة تعمل بنسبة (90%) بشكل جيد في الشهر الحالي إذا كانت تعمل بشكل جيد فى الشهر الماضى، كما لاحظ هذا الفرد أن الآلة تعمل بنسبة (70%) بشكل سيئ في الشهر الحالي وذلك إذا كانت تعمل بشكل سيئ فى الشهر الماضى.

المطلوب:

1- تحديد متجه الاحتمالات المبدئية وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي.

2- استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ بكل من:

أ- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي.

ب-احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل سيئ في الشهر الحالي.

ج-احتمالات أن تعمل الآلة فى الأجل الطويل وذلك لو بقيت مصفوفة احتمالات التنقل كما هى ولم تتغير وذلك باستخدام طريقة الحذف.

الحـــل

1- تحديد متجه الاحتمالات المبدئية وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي:

يمكن تحديد هذا المتجه بافتراض أن ت (1) = متجه الاحتمالات المبدئية حيث:

$ت_1$ = 1 = احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد في الشهر الحالي.

$ت_2$ = صفر = احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الشهر الحالي.

∴ ت (1) = (1، صفر)

*** اعداد مصفوفة احتمالات التنقل كما يلى:**

الشهر الحالي / الشهر الماضى	الآلة تعمل بشكل جيد	الآلة تعمل بشكل سيئ
الآلة تعمل بشكل جيد	0.90	0.10
الآلة تعمل بشكل سيئ	0.30	0.70

حيث أن: الصف الأول:

$ح_{11}$ = 0.90 = احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد في الشهر الحالي إذا كانت تعمل بشكل جيد فى الشهر الماضى.

$ح_{12}$ = 0.10 = احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الشهر الحالي بالرغم من أنها كانت تعمل بشكل جيد الشهر الماضى.

لاحظ أن مجموع احتمالات الصف الأول = واحد صحيح.

الصف الثانى:

$ح_{21}$ = 0.30 = احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد في الشهر الحالي وذلك بالرغم من أنها كانت تعمل بشكل سيئ الشهر الماضى.

$ح_{22}$ = 0.70 = احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الشهر الحالي إذا كانت تعمل بشكل سيئ فى الشهر الماضى.

لاحظ أيضاً أن مجموع احتمالات الصف الثانى = واحد صحيح.

2- استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ بكل من:

أ- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي:

أولاً: نحدد متجه الاحتمالات المبدئية

ت (1) = (1 ، صفر) حيث أننا فى حالة تأكد تام أن الآلة ستعمل بشكل جيد في الشهر الحالي.

ثانياً: نوجد احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم أى الفترة (ن +1):

∴ ت(2) = ت (1) ح

$$= (1 \text{ ، صفر}) \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix}$$

(1 × 0.90 + صفر × 0.30) = 0.90

(1 × 0.10 + (صفر× 0.70) = 0.10

∴ ت (2) = (0.90 ، 0.10)

ثالثاً: نوجد احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الأن أى فى الفترة (ن +2)

∴ ت (3) = ت (2) ح

$$= (0.90 \text{ ، } 0.10) \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$0.84 = (0.30 \times 0.10) + (0.90 \times 0.90)$

$0.16 = (0.70 \times 0.10) + (0.10 \times 0.90)$

∴ ت (3) = (0.16 ، 0.84)

∴ احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن

إذا كانت الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي = (84%)

واحتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ خلال شهرين من الآن وذلك إذا كانت تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي = (16%).

ب- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل سيئ في الشهر الحالي:

أولاً: نوجد متجه الاحتمالات المبدئية فى هذه الحالة:

ت (1) = (صفر، 1) حيث أننا فى حالة تأكد تام أن الآلة ستعمل بشكل سيئ في الشهر الحالي.

ثانياً: نوجد احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم أى فى الفترة (ن +1):

∴ ت (2) = ت (1) ح ← (لاحظ أن مصفوفة احتمالات التنقل كما هى)

$$= (\text{صفر} ، 1) \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$0.30 = (0.30 \times 1) + (0.90 \times \text{صفر})$

$0.70 = (0.70 \times 1) + (0.10 \times \text{صفر})$

∴ احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم = (30%)

واحتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ خلال الشهر القادم = (70%)

جـ- احتمالات أن تعمل الآلة فى الأجل الطويل وذلك لو بقيت مصفوفة احتمالات التنقل كما هى ولم تتغير باستخدام طريقة الحذف:

خطوات الوصول إلى وضع التوازن تتمثل فى:

1- تطبيق المعادلة التالية:

احتمالات الموقف فى الحالة التالية =

احتمالات الموقف فى الحالة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل.

متجه الحالة التالية = متجه الحالة الحالية × ح

وفى حالة وجود موقفين فقط فإن:

(ت$_1$ ، ت$_2$) = (ت$_1$ ، ت$_2$) × ح

أما فى حالة وجود ثلاث مواقف فإن:

(ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$) = (ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$) × ح

2- تكوين المعادلات من خلال ضرب متجه الموقف فى الحالة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل وذلك:

لتكوين معادلتين فقط فى حالة وجود موقفين (ت$_1$ ، ت$_2$)

أو تكوين ثلاث معادلات فى حالة وجود ثلاث مواقف (ت$_1$ ، ت$_2$، ت$_3$)

3- اضافة معادلة ثابتة فى جميع الحالات تعبر عن أن مجموع الاحتمالات = واحد صحيح.

فى حالة موقفين تكون المعادلة هى: ت$_1$ + ت$_2$ = 1

أما فى حالة ثلاث مواقف تكون المعادلة هى: ت$_1$ + ت$_2$ + ت$_3$ = 1

4- استبعاد أى من المعادلات التى تم تكوينها فى الخطوة (2)

حتى يتساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل (ولا يتم أبداً استبعاد المعادلة التى تم تكوينها فى الخطوة (3)).

5- نقوم بحل المعادلات المتبقية معاً للوصول إلى قيم المجاهيل بها ومن ثم الوصول إلى وضع التوازن.

وبالتطبيق علي المثال الحالي نجد أن:

احتمالات أن تعمل الآلة فى الأجل الطويل معناه الوصول إلى وضع التوازن لهذه الآلة فى الأجل الطويل لمعرفة احتمالات أن تعمل بشكل جيد واحتمالات أن تعمل بشكل سيئ فى الأجل الطويل.

نفترض أن:

$ت_1$ = احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد فى الأجل الطويل.

$ت_2$ = احتمالات أن تعمل الآلة بشكل سيئ فى الأجل الطويل.

فى وضع التوازن تكون:

احتمالات الموقف فى الفترة التالية =

احتمالات الموقف فى الفترة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل.

ت (متجه التالية) = ت(متجه الحالية) × ح

وحيث أنه يوجد موقفين فقط فإن:

($ت_1$ ، $ت_2$) = ($ت_1$ ، $ت_2$) × ح

أي أن:

$$(ت_1 ، ت_2) = (ت_1 ، ت_2) \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix}$$

أى أن:

$ت_1 = 0.90\ ت_1 + 0.30\ ت_2$ ← (1)

$ت_2 = 0.10\ ت_1 + 0.70\ ت_2$ ← (2)

وحيث أن مجموع الاحتمالات الخاصة بعمل الآلة بشكل جيد وعمل الآلة بشكل سيئ = واحد صحيح.

$\therefore ت_1 + ت_2 = 1$ ← (3)

وباعادة ترتيب المعادلات السابقة نجد أن:

$- 0.10\ ت_1 + 0.30\ ت_2$ = صفر ← (1)

$0.10\ ت_1 - 0.30\ ت_2$ = صفر ← (2)

$ت_1 + ت_2 = 1 \leftarrow (3)$

ونظراً لوجود ثلاث معادلات ومجهولين $ت_1$، $ت_2$ فإنه يمكن الإكتفاء بحل معادلتين فقط، وتحقيقاً لذلك يتم استبعاد أحد المعادلتين التى تم تكوينها المعادلة (1) أو المعادلة (2)، بفرض إننا استبعدنا المعادلة (2)، نقوم بعد ذلك بحل المعادلتين (1) ، (3) كما يلى:

$- 0.10\ ت_1 + 0.30\ ت_2 =$ صفر

$\therefore 0.30\ ت_2 = 0.10\ ت_1$ ومنها $ت_1 = \frac{0.30}{0.10} ت_2$

أي أن $ت_1 = 3\ ت_2$

* ايجاد قيمة ($ت_2$) بالتعويض عن($ت_1$) = 3 $ت_2$ فى المعادلة (3):

$3\ ت_2 + ت_2 = 1 \quad \therefore 4\ ت_2 = 1 \quad \therefore ت_2 = \frac{1}{4}$ يعنى (0.25)

* ايجاد قيمة ($ت_1$): بالتعويض عن قيمة ($ت_2$) = (0.25) فى المعادلة رقم (3):

$ت_1 + 0.25 = 1 \quad \therefore ت_1 = 0.75$

وبالتالى فإن: وضع التوازن = (0.75 ، 0.25) ومعناه

* احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد فى الأجل الطويل = (75%).
* احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ فى الأجل الطويل = (25%).

مثال(5):

إذا علمت أن هناك ثلاثة شركات تتنافس فى السوق، حيث تتمثل حصة كل منهما الحالية من السوق على التوالى فى (23%) للشركة (س)، (29.5%) للشركة (ص)، (47.5%) للشركة (ع)، وفى أى شهر من شهور العام تفقد الشركة (س) (18%) من عملائها إلى الشركة (ص) ، و(12%)إلى الشركة (ع). ولكن الشركة (ص) تحتفظ بنسبة (77%) من عملائها، فى حين أنها تفقد (17%) من عملائها إلى الشركة (س). وتفقد الشركة (ع) كل شهر أيضاً

(8%) من عملائها إلى الشركة (س)، و(6%) من عملائها إلى الشركة (ص).

المطلوب:

1- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل.

2- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث فى الفترة القادمة والفترة التى تلى الفترة القادمة.

3- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث فى وضع التوازن باستخدام طريقة الحذف.

الحـــل

1-اعداد مصفوفة احتمالات التنقل (ح)

$$ح = \begin{array}{c} \\ س \\ ص \\ ع \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} س & ص & ع \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.70 & 0.18 & 0.12 \\ 0.17 & 0.77 & 0.06 \\ 0.08 & 0.06 & 0.86 \end{bmatrix} \end{array}$$

لاحظ أن مجموع احتمالات كل صف لابد أن تساوى واحد صحيح وبالتالى فالمتمم يكون للصف كما هو الحال مثلاً للشركة (س) نجد أنها فقدت (0.18) للشركة (ص) ، (0.12) للشركة (ع) وبالتالى تبلغ نسبة العملاء الذين تحتفظ بهم الشركة (س): 1- (0.18 + 0.12) = (0.70) ..... وهكذا بالنسبة لباقى الشركات (أى باقى صفوف مصفوفة احتمالات التنقل)

2- أولاً: التنبؤ بحصص السوق للشركات الثلاث فى الفترة القادمة: أى الفترة (ن + 1):

ت (2) = ت (1) × ح

ت (1) = متجه الاحتمالات المبدئية وهى (0.23 ، 0.295 ، 0.475)

∴ ت (2) = ت (1) × ح

$$\begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.70 \\ 0.06 & 0.77 & 0.17 \\ 0.86 & 0.06 & 0.08 \end{bmatrix} (0.475 ، 0.295 ، 0.23) =$$

$$0.249 = (0.08 \times 0.475) + (0.17 \times 0.295) + (0.70 \times 0.23)$$

$$0.297 = (0.06 \times 0.475) + (0.77 \times 0.295) + (0.18 \times 0.23)$$

$$0.454 = (0.86 \times 0.475) + (0.06 \times 0.295) + (0.12 \times 0.23)$$

∴ ت (2)= (0.454 ، 0.297 ، 0.249)

لاحظ أن مجموع حصص السوق للشركات الثلاث في الفترة القادمة يساوى واحد صحيح.

ثانياً: التنبؤ بحصص السوق للشركات الثلاث فى الفترة التى تلى الفترة القادمة: المقصود هنا بالفترة (ن +2) أى المطلوب حساب ت (3):

ت (3) = ت(2) × ح

$$\begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.70 \\ 0.06 & 0.77 & 0.17 \\ 0.86 & 0.06 & 0.08 \end{bmatrix} (0.454 ، 0.297 ، 0.249) =$$

$$0.261 = (0.08 \times 0.454) + (0.17 \times 0.297) + (0.70 \times 0.249)$$

$$0.301 = (0.06 \times 0.454)+ (0.77 \times 0.297) + (0.18 \times 0.249)$$

$$0.438 = (0.86 \times 0.454) + (0.06 \times 0.297 + (0.12 \times 0.249)$$

∴ ت (3) = (0.438 ، 0.301 ، 0.261)

لاحظ أن مجموع حصص السوق للشركات الثلاث فى أى فترة زمنية يساوى واحد صحيح.

3- التنبؤ بحصص السوق للشركات الثلاث فى وضع التوزان باستخدام طريقة الحذف:

يمكن توضيح كيفية الوصول إلى وضع التوازن كما يلى:

أ- تطبيق المعادلة التالية:

احتمالات الموقف فى الحالة التالية =

احتمالات الموقف فى الحالة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل

متجه الحالة التالية = متجه الحالة الحالية × ح

وحيث أنه يوجد ثلاثة مواقف فإن:

(ت$_1$ ، ت$_2$، ت$_3$) = (ت$_1$ ، ت$_2$، ت$_3$) × ح

$$\begin{bmatrix} 0.70 & 0.18 & 0.12 \\ 0.17 & 0.77 & 0.06 \\ 0.08 & 0.06 & 0.86 \end{bmatrix}$$ (ت$_1$ ت$_2$ ت$_3$) = (ت$_1$ ت$_2$ ت$_3$)

أى أن:

ت$_1$ = 0.70 ت$_1$ + 0.17 ت$_2$ + 0.08 ت$_3$ ← (1)

ت$_2$ = 0.18 ت$_1$ + 0.77 ت$_2$ + 0.06 ت$_3$ ← (2)

ت$_3$ = 0.12 ت$_1$ + 0.06 ت$_2$ + 0.86 ت$_3$ ← (3)

وحيث أن مجموع حصص السوق للشركات الثلاثة يساوى واحد صحيح

∴ يمكن اضافة معادلة رابعة إلى المعادلات السابقة كما يلى:

ت$_1$ + ت$_2$ + ت$_3$ = 1 ← (4)

وبإعادة ترتيب المعادلات السابقة (1)،(2)،(3) وضربها فى (100)

− 30 ت$_1$ + 17 ت$_2$ + 8 ت$_3$ = صفر ← (1)

18 ت$_1$ − 23 ت$_2$ + 6 ت$_3$ = صفر ← (2)

12 ت$_1$ + 6 ت$_2$ − 14 ت$_3$ = صفر ← (3)

ت$_1$ + ت$_2$ + ت$_3$ = 1 ← (4)

ونظراً لوجود أربعة معادلات وثلاثة مجاهيل (ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$)

فإنه يمكن استبعاد المعادلة (3) والاكتفاء بحل ثلاث معادلات فقط كما يلى:

الخطوة الأولى: نضرب المعادلة (1) فى (0.6) ونجمعها على المعادلة (2) كما يلى:

$$- 18 ت_1 + 10.2 ت_2 + 4.8 ت_3 = صفر$$

$$18 ت_1 - 23 ت_2 + 6 ت_3 = صفر$$

$$- 12.8 ت_2 + 10.8 ت_3 = صفر$$

$$\therefore 10.8 ت_3 = 12.8 ت_2$$

$$\therefore ت_3 = 12.8 ت_2 \div 10.8$$

$$\therefore ت_3 = \frac{12.8}{10.8} ت_2 \quad \therefore ت_3 = 1.1851852 ت_2$$

الخطوة الثانية: نضرب المعادلة (1) فى (−0.75) ونجمعها على المعادلة (2) كما يلى:

$$22.5 ت_1 - 12.75 ت_2 - 6 ت_3 = صفر$$

$$18 ت_1 - 23 ت_2 + 6 ت_3 = صفر$$

$$40.5 ت_1 - 35.75 ت_2 = صفر$$

$$\therefore 40.5 ت_1 = 35.75 ت_2$$

$$\therefore ت_1 = \frac{35.75}{40.5} ت_2$$

$$\therefore ت_1 = 0.882716 ت_2$$

الخطوة الثالثة: يتم تحديد قيمة ($ت_2$) بالتعويض عن قيمة ($ت_1$) ، ($ت_3$) فى المعادلة رقم(4): $ت_1 + ت_2 + ت_3 = 1$ كما يلى:

$$0.882716 ت_2 + ت_2 + 1.1851852 ت_2 = 1$$

$$\therefore 3.0679012 ت_2 = 1$$

$$\therefore ت_2 = 0.3259557$$

ايجاد قيمة ($ت_1$) كما يلى:

$ت_1 = 0.882716\ ت_2$

$\therefore ت_1 = 0.882716 \times 0.3259557$

$\therefore ت_1 = 0.2877263$

ايجاد قيمة ($ت_3$) كما يلى:

$ت_3 = 1.1851852 \times ت_2$

$ت_3 = 1.1851852 \times 0.3259557 =$

$\therefore ت_3 = 0.3863178$

وفى ضوء ذلك فإن حصص الشركات الثلاث فى وضع التوازن هى:

الشركة (س) $= ت_1 = 0.2877263 \simeq 0.288$

الشركة (ص) $= ت_2 = 0.3259557 \simeq 0.326$

الشركة (ع) $= ت_3 = 0.3863178 \simeq 0.386$

لاحظ أن مجموع حصص الشركات الثلاث فى وضع التوازن يساوى واحد صحيح.

مثال(6): إذا توفرت لديك مصفوفة احتمالات التنقل لعدد من العملاء بين ثلاث شركات متنافسة فى السوق وهى (س) ، (ص) ، (ع):

$$ح = \begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{array}}{\begin{bmatrix} 0.65 & 0.20 & 0.15 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix}}$$

وكانت حصص الشركات الثلاث من السوق هى:

(0.40 ، 0.35 ، 0.25) على التوالى.

المطلوب: التنبؤ بحصص الشركات الثلاث من السوق فى وضع التوازن باستخدام طريقة المحددات.

الحـــل

* يمكن توضيح كيفية الوصول لوضع التوازن باستخدام طريقة المحددات كما يلى:

*عند وضع التوازن يكون

متجه الحالة التالية = متجه الحالة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل

(ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$) = (ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$) × ح

$$(ت_1، ت_2، ت_3) = (ت_1، ت_2، ت_3)\begin{bmatrix} 0.65 & 0.20 & 0.15 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix}$$

أى أن:

ت$_1$ = 0.65 ت$_1$ + 0.05 ت$_2$ + 0.10 ت$_3$ ← (1)

ت$_2$ = 0.20 ت$_1$ + 0.90 ت$_2$ + 0.10 ت$_3$ ← (2)

ت$_3$ = 0.15 ت$_1$ + 0.05 ت$_2$ + 0.80 ت$_3$ ← (3)

ت$_1$ + ت$_2$ + ت$_3$ = 1 ← (4)

باعادة ترتيب المعادلات السابقة نجد أن:

− 0.35 ت$_1$ + 0.05 ت$_2$ + 0.10 ت$_3$ = صفر ← (1)

0.20 ت$_1$ − 0.10 ت$_2$ + 0.10 ت$_3$ = صفر ← (2)

0.15 ت$_1$ + 0.05 ت$_2$ − 0.20 ت$_3$ = صفر ← (3)

ت$_1$ + ت$_2$ + ت$_3$ = 1 ← (4)

نقوم بحذف المعادلة رقم (1) وحل باقى المعادلات باستخدام طريقة المحددات للوصول إلى قيم كل من (ت$_1$) ، (ت$_2$) ، (ت$_3$) كما يلى:

* يتم إظهار المعادلات (2) ، (3) ، (4) فى المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.10- & 0.20 \\ 0.20- & 0.05 & 0.15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ت}_3 \quad \text{ت}_2 \quad \text{ت}_1)$$

يتم ايجاد قيم كل من (ت_1) ، (ت_2) ، (ت_3) باستخدام طريقة المحددات كما يلى:

أولاً: ايجاد المحدد العام للمصفوفة كما يلى:

$$\begin{bmatrix} 0.05 & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} 0.20- & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10+ \begin{bmatrix} 0.20- & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.20$$

$$0.20-) - (1 \times 0.15)]\ 0.10\ +[(1 \times 0.20-) - (1 \times 0.05)]\ 0.20 =$$

$$[(1\times 0.05) - (1\times 0.15)\ ]\ 0.10 + \ [(1\times$$

$$(0.10\times 0.10) + (0.35\times 0.10) + (0.25 \times 0.20) =$$

$$0.095 = 0.01 + 0.035 + 0.05$$

*** ايجاد محدد (ت_1) كما يلى:**

$$\begin{vmatrix} 0.10 & 0.10- & \text{صفر} \\ 0.20- & 0.05 & \text{صفر} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.05 & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10+ \begin{bmatrix} 0.20- & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10+ \begin{bmatrix} 0.20- & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{صفر} =$$

= صفر[(0.05 × 1)− (− 0.20× 1)] + 0.10 [(صفر × 1) −

(− 0.20×1)] + 0.10 [(صفر ×1) − (0.05 ×1)]

= صفر + (0.10 × 0.20) + (0.10 × − 0.05)

= صفر + 0.02 − 0.005 = 0.015

∴ قيمة ($ت_1$) = قيمة محدد ($ت_1$) / المحدد العام للمصفوفة = 0.015 / 0.095 = 0.158

*** ايجاد محدد ($ت_2$) كما يلى:**

0.20	صفر	0.10
0.15	صفر	−0.20
1	1	1

=0.20 [صفر −0.20 ؛ 1 1] + صفر [0.15 −0.20 ؛ 1 1] +0.10 [0.15 صفر ؛ 1 1]

= 0.20 [(صفر ×1) − (−0.20 × 1)] + صفر [(0.15 ×1) − (1× 0.15) − (−0.20

×1)] + 0.10 [(1× 0.15) − (صفر ×1)]

= (0.20 × 0.20)+ (صفر × 0.35) + (0.10 × 0.15)

= 0.04 + صفر + 0.015 = 0.055

∴ قيمة ($ت_2$) = 0.055 / 0.095 = 0.579

*** ايجاد محدد ($ت_3$) كما يلى:**

0.20	−0.10	صفر
0.15	0.05	صفر
1	1	1

$$= 0.20 \begin{bmatrix} 0.05 & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0.10 \begin{bmatrix} 0.15 & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \text{صفر} \begin{bmatrix} 0.15 & 0.05 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

= 0.20 [(0.05 × 1) − (صفر × 1)] + 0.10 [(0.15 × 1) − (صفر × 1)] + صفر [(0.15 × 1) − (0.05 × 1)]

= (0.20 × 0.05) + (0.10 × 0.15) + صفر

= 0.01 + 0.015 + صفر = 0.025

∴ **قيمة (ت$_3$)** = $\frac{0.025}{0.095}$ = 0.263

وبالتالى فإن:

ت$_1$ = 0.158

ت$_2$ = 0.579

ت$_3$ = 0.263

وبالتالى فإن حصص الشركات الثلاث من السوق فى وضع التوازن هى:

* حصة الشركة (س) = ت$_1$ = 0.158
* حصة الشركة (ص) = ت$_2$ = 0.579
* حصة الشركة (ع) = ت$_3$ = 0.263

ملحوظة: بحل المعادلات (2) ، (3) ، (4) باستخدام طريقة الحذف ستصل إلى نفس قيم (ت$_1$ ، ت$_2$ ، ت$_3$) التى توصلنا إليها باستخدام طريقة المحددات (حاول عزيزى القارئ أن تتأكد من ذلك بنفسك).

استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى إدارة الديون (حالة الاحتواء):

تعتبر إدارة الديون من أشهر التطبيقات الخاصة بحالة الاحتواء Absorbing State ويقصد بهذه الحالة أن النظام يوجد فى حالة معينة ويصبح متشبعاً بها بحيث لا يمكنه الانتقال من هذه الحالة إلى حالة أخرى فى المستقبل.

وكمثال لحالة الاحتواء إذا قام عميل بدفع قيمة ما اشتراه من بضاعة خلال شهر يناير، فإنه من المستحيل أن يكون عليه دين عن نفس البضاعة التى اشتراها فى هذا الشهر خلال شهر فبراير القادم. وكذلك إذا امتنع أحد العملاء عن سداد ديونه لمدة طويلة للمنظمة بعد تاريخ استحقاقها، وإذا تأكدت المنظمة من عدم استرداد هذا المبلغ، فإنها تقوم بعلاج هذا الدين من الناحية الدفترية باعتباره ديوناً معدومة وبالتالى يظل العميل فى هذه الحالة إلى الأبد.

فالمنظمة تقوم بتصنيف أوراق القبض عادة إلى عدة مجموعات أومواقف (حالات) وذلك وفقاً لأقدمية هذه الأوراق وتجاوزها لتاريخ الاستحقاق، أى وفقاً لتاريخ استحقاقها أو لأقدمية تجاوزها لهذا التاريخ.

وتتحدد عدد المجموعات (المواقف) وفقاً لسياسة الشركة ذاتها، وتمثل المجموعات (المواقف) النمطية المجموعات التالية:

الموقف الأول(ت$_1$): أوراق القبض التى تم دفعها بالكامل.

الموقف الثانى(ت$_2$): ديون معدومة، تجاوزت تاريخ استحقاقها أكثر من أربعة شهور.

الموقف الثالث(ت$_3$): ديون تجاوزت تاريخ استحقاقها بأقل من شهر.

الموقف الرابع(ت$_4$): ديون تجاوزت تاريخ استحقاقها مدة من شهر إلى أربعة شهور.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن احتمال وجود أى عميل فى حالة الاحتواء لابد وأن يساوى الواحد الصحيح. بينما فى الحالات العادية هذا الاحتمال يتوقف على وجود أو عدم وجود العميل فى كل حالة من هذه الحالات.

ويمكن توضيح كيفية استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى إدارة ديون المنظمة من خلال المثال التالى:

مثال(6): يوضح الجدول التالى مصفوفة احتمالات التنقل الخاصة بسياسة تحصيل أوراق القبض بشركة النور للأوراق المالية وذلك خلال الشهر القادم:

الشهر القادم / الشهر الحالى		الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة	الحالة الرابعة
		مدفوع بالكامل	ديون معدومة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور
الحالة الأولى	مدفوع بالكامل	1	صفر	صفر	صفر
الحالة الثانية	ديون معدومة	صفر	1	صفر	صفر
الحالة الثالثة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	0.5	صفر	0.3	0.2
الحالة الرابعة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق1-4 شهور	0.6	0.1	0.2	0.1

فإذا علمت أن النسبة الحالية للعملاء فى المجموعات الأربعة هى: 0.45 ، 0.10 ، 0.20 ، 0.25 على التوالى. وأن قيمة أوراق القبض بالنسبة للحالة الثالثة = 8000 جنيه، وبالنسبة للحالة الرابعة = 12000 جنيه.

المطلوب: استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى:

1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة فى الشهر القادم.

2- تحديد مقدار المبلغ الذى سيتم دفعه فى الحالتين الثالثة والرابعة، وما هو مقدار الديون المعدومة منها؟

الحـــل

1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة فى الشهر القادم:

ت(1) = متجه الاحتمالات المبدئية (النسبة الحالية للعملاء فى المجموعات الأربعة وهي = (0.45 ، 0.10 ، 0.20 ، 0.25)

$$\text{ح} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & 1 \\ \text{صفر} & \text{صفر} & 1 & \text{صفر} \\ 0.2 & 0.3 & \text{صفر} & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

للتنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة فى الشهر القادم أى خلال الفترة (ن + 1)

∴ ت (2) = ت (1)ح

$$= (0.25 \text{ ، } 0.20 \text{ ، } 0.10 \text{ ، } 0.45) \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & 1 \\ \text{صفر} & \text{صفر} & 1 & \text{صفر} \\ 0.2 & 0.3 & \text{صفر} & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

= (0.70 ، 0.125 ، 0.11 ، 0.065)

أى أن النسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة فى الشهر القادم هى:

نسبة الديون المدفوعة بالكامل = 0.70

نسبة الديون المعدومة = 0.125

نسبة الديون التى تجاوزت تاريخ استحقاقها بأقل من شهر = 0.11

نسبة الديون التى تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور = 0.065

2- تحديد مقدار المبلغ الذى سيتم دفعه فى الحالتين الثالثة والرابعة:

يتم ذلك عن طريق الخطوات التالية:

– تقسيم مصفوفة احتمالات التنقل إلى أربعة أجزاء كالتالى:

(ب)		(أ)	
صفر	صفر	صفر	1
صفر	صفر	1	صفر
(د)		(جـ)	
0.2	0.3	صفر	0.5
0.1	0.2	0.1	0.6

وبالتالى نحصل على المصفوفات الأربعة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{ب} \;،\; \begin{bmatrix} \text{صفر} & 1 \\ 1 & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \text{د} \;،\; \begin{bmatrix} \text{صفر} & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} = \text{جـ}$$

*** ايجاد المصفوفة الأساسية (ص)**

ويمكن حساب المصفوفة الأساسية عن طريق استخدام المعادلة التالية:

ص = (أ – د)$^{1-}$

وهذا يعنى أننا نقوم بطرح المصفوفة (د) من المصفوفة (أ) ثم نأخذ مقلوب النتائج الخاصة بالطرح، فالعلامة (–1) تعنى مقلوب المصفوفة كما يلى:

$$\begin{bmatrix} 0.2- & 0.7 \\ 0.9 & 0.2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{صفر} & 1 \\ 1 & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{ص}$$

ثم إيجاد مقلوب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 0.2- & 0.7 \\ 0.9 & 0.2- \end{bmatrix}^{1-}$$

وذلك عن طريق اتباع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: ايجاد محدد المصفوفة:

محدد المصفوفة = [حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى – حاصل ضرب عناصر القطر العكسي]

$$= [(0.2- \times 0.2-) - (0.9\times 0.7)] = 0.59$$

الخطوة الثانية: ايجاد مصفوفة المرافقات: وذلك عن طريق تبديل أرقام القطر الرئيسي والعكسي والغاء الاشارات السالبة في القطر العكسي:

مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

الخطوة الثالثة: ايجاد المصفوفة المبدلة: عن طريق تحويل أرقام الصف الأول في مصفوفة المرافقات إلى عمود أول، والصف الثانى إلى عمود ثانى ....

المصفوفة المبدلة = $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

الخطوة الرابعة: ايجاد مقلوب المصفوفة كما يلى:

مقلوب المصفوفة = $\dfrac{1}{\text{محدد المصفوفة}}$ × المصفوفة المبدلة

$$= \frac{1}{0.59}\begin{bmatrix}0.2 & 0.9\\ 0.7 & 0.2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.34 & 1.53\\ 1.19 & 0.34\end{bmatrix}$$

ويمثل هذا المقلوب "المصفوفة الأساسية (ص)

$$\text{ص} = \begin{bmatrix}0.34 & 1.53\\ 1.19 & 0.34\end{bmatrix}$$

*** ضرب المصفوفة الأساسية (ص) × المصفوفة (ج)**

$$\begin{bmatrix}0.34 & 1.53\\ 1.19 & 0.34\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{صفر} & 0.5\\ 0.1 & 0.6\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}(\text{صفر} \times 0.153) + (0.1 \times 0.34) & (0.5 \times 1.53) + (0.6 \times 0.34)\\ (\text{صفر} \times 0.34) + (0.1 \times 1.19) & (0.5 \times 0.34) + (0.6 \times 1.19)\end{bmatrix}$$

$$\textbf{(ص)} \times \textbf{(ج)} = \begin{bmatrix}0.03 & 0.97\\ 0.12 & 0.88\end{bmatrix}$$

ويمكن حساب مقدار المبالغ المدفوعة، ومقدار الديون المعدومة فى الحالتين الثالثة والرابعة كما يلى:

$$(8000 \text{ ، } 12000)\begin{bmatrix}0.03 & 0.97\\ 0.12 & 0.88\end{bmatrix}$$

ومن ذلك نجد أن:

*** مقدار المبالغ المدفوعة فى الحالتين الثالثة والرابعة**

= (0.97 × 8000) + (0.88 × 12000)

= 7760 + 10560 = 18320 جنيه

*** مقدار الديون المعدومة فى الحالتين الثالثة والرابعة**

= (0.03 × 8000) + (0.12 × 12000)

= 240 + 1440 = 1680 جنيه

ومعنى ذلك أن مبلغ قدرة (20000) (فيه 8000 فى الحالة التى تجاوزت تاريخ استحقاق من أوراق القبض أقل من شهر، ومبلغ 12000 فى الحالة التى تجاوزت تاريخ استحقاقها من شهر إلى أربعة شهور) سوف يدفع منه (18320) جنيه، بينما يمثل المبلغ الباقى وهو(1680) جنيه ديوناً معدومة بالنسبة للشركة.

تمارين علي الفصل السادس

تمرين(1): بفرض أنه هناك منطقة بها200000 عميل، ويوجد فى هذه المنطقة (3) متاجر ويحصل المتجر الأول على 80000 عميل، والمتجر الثانى يحصل على 60000 عميل، أما المتجر الثالث فيحصل على 60000 عميل.

بفرض أن البيانات السابقة أوضحت أن (10%) من عملاء المتجر الأول ينتقلوا إلى المتجر الثانى، و(10%) أخرين ينتقلوا إلى المتجر الثالث. كما أوضحت البيانات أن (10%) من عملاء المتجر الثانى ينتقلوا إلى المتجر الأول، و(20%) أخرين ينتقلوا إلى المتجر الثالث. وأخيراً أوضحت البيانات أن (20%) من عملاء المتجر الثالث ينتقلوا إلى المتجر الأول، و(20%) أخرين ينتقلوا إلى المتجر الثانى.

المطلوب:

1- اعداد متجه الاحتمالات المبدئية فى هذه الحالة.

2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل بين المتاجر الثلاثة.

3- التنبؤ بحصة كل متجر من العملاء فى الفترة القادمة باستخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف.

4- التنبؤ بحصة كل متجر من العملاء فى الفترة التى تلي الفترة القادمة باستخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف.

تمرين (2): بفرض أن "أحمد محمود" لديه سيارة، وفى كل يوم لا يعرف إذا كانت تلك السيارة سوف تعمل أم لا. (80%) من الوقت إنها سوف تعمل اليوم إذا كانت قد بدأت العمل فى اليوم السابق مباشرة، (90%) من الوقت لن تعمل اليوم إذا كانت لم تعمل فى اليوم السابق مباشرة.

المطلوب:

1- تحديد متجه الاحتمالات المبدئية وذلك إذا علمت أن السيارة قد بدأت العمل اليوم.

2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل لتلك السيارة.

3- استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ بكل من:

أ- احتمالات أن تبدأ السيارة العمل غداً إذا كانت قد بدأت العمل اليوم.

ب- احتمالات عدم عمل السيارة غداً إذا كانت لم تعمل اليوم.

ج- احتمالات أن تعمل السيارة فى الأجل الطويل وذلك لو بقيت مصفوفة احتمالات التنقل كما هى ولم تتغير وذلك باستخدام طريقة الحذف.

تمرين (3): إذا كان هناك ثلاثة شركات تتنافس فى السوق حيث تتمثل حصة كل منهما الحالية من السوق على التوالى فى (25%) للشركة (أ) ، (35%) للشركة (ب) ، (40%) للشركة (جـ). وفى أى شهر من شهور العام تفقد الشركة (أ) (10%) من عملائها إلى الشركة (ب)، و(10%) إلى الشركة (جـ). ولكن الشركة (ب) لديها القدرة على الاحتفاظ بنسبة (90%) من عملائها على مدار العام، فى حين أنها تفقد (7%) من عملائها إلى الشركة (أ). وتفقد الشركة (جـ) (8%) من عملائها إلى الشركة (أ) ، و(7%) من عملائها إلى الشركة (ب).

المطلوب:

1- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل لتلك المشكلة.

2- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث فى الشهر القادم.

3- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث فى وضع التوازن باستخدام طريقة الحذف.

تمرين (4): تمتلك شركة "ريماس" ألة معينة، وقد لاحظت الشركة أن الآلة تعمل بنسبة (80%) بشكل جيد هذا الشهر إذا كانت تعمل بشكل جيد فى

الشهر الماضى، كما لاحظت الشركة أيضاً أن الآلة تعمل بنسبة (60%) بشكل سيئ هذا الشهر وذلك إذا كانت تعمل بشكل سيئ فى الشهر الماضى.

المطلوب:

1- التنبؤ باحتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد هذا الشهر.

2- التنبؤ باحتمالات أن تعمل الآلة بشكل سيئ خلال الشهر القادم وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل سيئ هذا الشهر.

3- التنبؤ باحتمالات أن تعمل الآلة فى الأجل الطويل وذلك فى حالة عدم تغير مصفوفة احتمالات التنقل.

تمرين (5): بفرض أن الجدول التالى يعبر عن احتمالات التنقل فى أوراق القبض للشهر القادم لإحدى الشركات:

الشهر القادم / الشهر الحالي		مجموعة (1)	مجموعة (2)	مجموعة (3)	مجموعة (4)
		مدفوع بالكامل	ديون معدومة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور
مجموعة (1)	مدفوع بالكامل	1	صفر	صفر	صفر
مجموعة (2)	ديون معدومة	صفر	1	صفر	صفر
مجموعة (3)	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	0.7	0.2	صفر	0.1
مجموعة (4)	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور	0.5	0.2	0.2	0.1

فإذا علمت أن النسبة الحالية للعملاء فى المجموعات الأربعة هى : 0.60 ، 0.20 ، 0.10 ، 0.10 على التوالى. وأن قيمة أوراق القبض بالنسبة للمجموعة (3) = 25000 جنيه، وبالنسبة للمجموعة (4) = 50000 جنيه.

المطلوب:

1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة فى الشهر القادم.

2- تحديد مقدار المبلغ الذى سيتم دفعة فى المجموعتين (3) ، (4)، وما هو مقدار الديون المعدومة منها؟

تمرين(6): بفرض أن الجدول التالى يعبر عن احتمالات التنقل الخاصة بسياسة تحصيل الديون بشركة "النهار السعيد" التجارية وذلك فى أول شهر يناير 2016:

الشهر القادم / الشهر الحالي		حالة (1)	حالة (2)	حالة (3)	حالة (4)
		مدفوع بالكامل	ديون معدومة	ديون تجاوزت بأقل من شهر	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-5 شهور
حالة (1)	مدفوع بالكامل	1	صفر	صفر	صفر
حالة (2)	ديون معدومة	صفر	1	صفر	صفر
حالة (3)	ديون تجاوزت بأقل من شهر	0.7	صفر	0.2	0.1
حالة (4)	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-5 شهور	0.4	0.2	0.2	0.2

فإذا علمت أن النسبة الحالية للعملاء فى الحالات الأربعة هى: 0.40 ، 0.10 ، 0.30 ، 0.20 على التوالى. وأن قيمة أوراق القبض بالنسبة للحالة (3) = 4000 جنيه، وبالنسبة للحالة (4) = 10000 جنيه.

المطلوب:

1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة فى الشهر القادم.

2- تحديد مقدار المبلغ الذى سيتم دفعه فى الحالتين (3) ، (4)، وما هو مقدار الديون المعدومة منها؟

تمرين (7): يقوم "البنك الأهلى المصرى" كل عام بإجراء مجموعة من الاختبارات وذلك لاختبار مدى المام المتقدمين للعمل فى البنك بالحاسب الآلى. ويقوم البنك بتصنيف نتائج هذه الاختبارات إلى (4) مجموعات (مواقف) كما يلى:

المجموعة الأولى: اجتاز كل الاختبارات ويعفى المتقدم من الدورة التدريبية التى يقدمها البنك.

المجموع الثانية: عدم اجتاز كل الاختبارات ولابد من أخذ الدورة التدريبية التى يقدمها البنك.

المجموعة الثالثة: عدم اجتياز الاختبار فى أول محاولة.

المجموعة الرابعة: عدم اجتياز الاختبار فى ثانى محاولة.

وقد لاحظ قسم الاختيار والتعيين المشرف على الاختبارات وجود مصفوفة احتمالات التنقل التالية:

$$\begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & 1 \\ \text{صفر} & \text{صفر} & 1 & \text{صفر} \\ 0.2 & 0.2 & \text{صفر} & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} = \text{ح}$$

فإذا علمت أن عدد المتقدمين الذين لم يجتازوا الاختبار فى أول محاولة (المجموعة الثالثة) = 2000 متقدم، وأن عدد المتقدمين الذين لم يجتازوا الاختبار فى ثانى محاولة = 5000 متقدم.

المطلوب: استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى التنبؤ بكل من:

1- عدد المتقدمين الذين اجتازوا كل الاختبارات ويعفوا من الدورة التدريبية التى يقدمها البنك.

2- عدد المتقدمين الذين لم يجتازوا كل الاختبارات ولابد من أخذهم الدورة التدريبية التى يقدمها البنك.

الفصل السابع

نظرية القرارات

Decisions Theory

- مقدمة.
- مفهوم نظرية القرارات.
- عناصر عملية صنع واتخاذ القرارات.
- خطوات تحليل القرار.
- بيئة اتخاذ القرار:

أولاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة التأكد التام.

ثانياً: اتخاذ القرار فى ظل حالة عدم التأكد.

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الواقعية.

5- معيار الأسف (الندم) (معيار أدنى الأقصى).

ثالثاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة الخطر:

* القيمة النقدية المتوقعة (EMV).

- استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى حالة الأرباح (طريقة القيمة أو العائد المتوقع).

- استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى حالة الخسائر (طريقة خسارة الفرصة البديلة المتوقعة).

- القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة.

- تحليل الحساسية.

* شجرة القرار Decision Tree

* تمارين للتدريب.

نظرية القرارات

مقدمة:

تعتبر عملية اتخاذ القرارات هى جوهر العملية الإدارية، وتتميز معظم القرارات التى يواجهها المديرون بأنها تتم فى ظروف معقدة وتتسم بعدم التأكد.
وتعرف عملية اتخاذ القرار بأنها العملية التى يتم بمقتضاها اختيار بديل واحد أو أكثر من بين مجموعة البدائل المتاحة لحل مشكلة معينة لتحقيق هدف أو مجموعة من الأهداف فى ضوء معطيات كل من البيئة الداخلية والبيئة الخارجية والموارد المتاحة للمنظمة.

ونظراً لظروف عدم التأكد فلا يمكن التأكد من نتائج القرار الذى تم اتخاذه، ومن ثم فلابد من تحديد مجموعة من المعايير التى يتم بناءاً عليها المقارنة بين هذه البدائل. وبالطبع إذا أمكن تحديد البدائل وتحديد النواتج المتوقعة من كل بديل فإن عملية اتخاذ القرار تكون بسيطة وسهلة وتعتبر القرارات فى هذه الحالة روتينية أو مبرمجة. ولكن هذه الحالة نادراً ما تواجه المديرون عند اتخاذ القرارات. فمعظم الحالات التى يواجهها المديرون تتميز بعدم توافر المعلومات مما يؤدى إلى عدم إمكانية تحديد جميع البدائل الممكنة أو تحديد النواتج المحتملة لكل بديل، ونتيجة لذلك ظهرت نظرية القرارات والتى تهدف إلى تمكين المديرين من اتخاذ القرارات فى ظل ظروف بيئية تتسم بالحظر وعدم التأكد.

مفهوم نظرية القرارات:

تهتم نظرية القرارات بصفة أساسية ببيان كيفية مساعدة متخذ القرار فى صنع واتخاذ القرارات وذلك فى ظل بيئة معينة، بحيث تمكنه من تحليل مجموعة من المواقف والتى تشتمل على العديد من البدائل المختلفة والنواتج المختلفة. كما تقدم أيضاً لمتخذ القرار الأساليب الرشيدة التى تساعده على الاختيار السليم للبديل المناسب خلال عملية اتخاذ القرار. وفى ضوء ذلك

يمكن القول أن نظرية القرارات تستخدم فى معاونة متخذ القرار فى اختيار البديل أو الإستراتيجية المثلى من بين عدة بدائل باستخدام الأسلوب التكنيكى المناسب لمعطيات كل قرار، وخاصة إذا كانت عملية اتخاذ القرار تتم فى بيئة عدم التأكد. هذا بالإضافة إلى أن نظرية القرارات تستخدم عدد من النماذج الكمية التى تساعد متخذ القرار فى تقييم البدائل المختلفة المتاحة أمامه لحل المشكلة وذلك لاختيار البديل الأفضل من بينها.

وتتمثل أهم التطبيقات لنظرية القرارات فى المجال الإدارى فى اعداد تقديرات لإحتياجات الشركة الصناعية من الآلات والمعدات، واختيار أفضل الطرق لاختيار المواقع المناسبة لإقامة المشروعات والتوسعات الجديدة بالشركة، وتحديد ما إذا كانت توجد حاجة لإضافة خط إنتاجى جديد لخطوط الإنتاج بالشركة أم لا ؟

عناصر عملية صنع واتخاذ القرارات:

توجد عدة عناصر لعملية صنع واتخاذ القرارات وهى:

1- **متخذ القرار:** هو الشخص (فرد أو مجموعة) الذى يقوم باتخاذ القرار عن طريق اختيار البديل الأفضل من بين مجموعة البدائل المتاحة أمامه لحل مشكلة معينة أو تحقيق هدف معين.

2- **أهداف متخذ القرار:** قد يكون هدف متخذ القرار هو تعظيم الربح أو تدنية التكاليف أو تدعيم المركز التنافسى أو الحفاظ على بقاء واستمرار المنظمة، أو غير ذلك من الأهداف.

3- **معيار التعظيم أو التفضيل:** وهو المعيار الذى يجب الرجوع إليه للتعرف على مدى تحقيق الأهداف. فقد يكون المعيار هو تعظيم الربح أو تدنية التكاليف. فإذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم الربح فإنه يتم اختيار البديل الذى يحقق أكبر عائد ممكن، أما إذا كانت المشكلة تهدف إلى تدنية التكاليف فإنه يتم اختيار البديل الذى يحقق أقل تكلفة ممكنة.

4- **حالات الطبيعة:** تمثل العوامل الخارجية المؤثرة فى عملية اتخاذ القرارات والتى لا يتمكن متخذ القرار من السيطرة عليها. وحالات الطبيعة تشير إلى الأحداث غير المؤكدة التى تقابل متخذ القرار بعد اتخاذه القرار، مثل أن يواجه متخذ قرار الشراء بعدم التأكد من الكمية التى سوف يقوم ببيعها فى السوق، فالحالات المتوقعة تكون 50 ، 55، 60 ، 65 وحدة.

خطوات تحليل القرار:

تعرف عملية اتخاذ القرار بأنها اختيار البديل المناسب من بين البدائل المتاحة أمام متخذ القرار. وتتمثل الخطوات الرئيسية فى تحليل أى قرار بصرف النظر عن درجة أهميته فى ست خطوات رئيسية وهى:

1- التحديد الواضح للمشكلة التى تواجه الشركة.

2- تحديد وتنمية البدائل الممكنة للتعامل مع المشكلة.

3- تحديد النتائج المحتملة للموقف والقرار.

4- تحديد الربح والعوائد من كل بديل وكل نتيجة محتملة.

5- اختيار أحد نماذج نظرية القرار الرياضية.

6- تطبيق النموذج التى تم اختيار واتخاذ القرار.

بيئة اتخاذ القرار:

يختلف أسلوب اتخاذ القرار باختلاف متغيرات البيئة سواء كانت بيئة داخلية أو خارجية والتى تؤثر على سلوك متخذ القرار، كما أن نوع القرار المتخذ يتوقف عادة على كمية وحجم المعلومات المتوفرة عن الموقف الذى تم فيه اتخاذ القرار.

ويطلق على بيئة القرار ظروف القرار والتى يقصد بها درجة اليقين التى تتوفر لمتخذ القرار عند اتخاذه لقرار ما.

وفى ضوء ذلك يمكن التمييز بين أربعة أنواع من الظروف التى يتم فى ظلها القيام بعملية اتخاذ القرارات وهى:

أولاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة التأكد التام.

ثانياً: اتخاذ القرار فى ظل حالة عدم التأكد.

ثالثاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة الخطر.

رابعاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة الصراع (المنافسة)

وسوف نعرض فيما يلى للحالات الثلاثة الأولى أما الحالة الرابعة فسوف يتم التعرض لها فى فصل نظرية المباريات.

أولاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة التأكد التام:

فى ظل حالة التأكد التام تكون البيانات اللازمة لاتخاذ القرار معروفة ومؤكدة ومحددة. ويكون متخذ القرار على علم تام بكافة النتائج الخاصة بكل بديل من البدائل المتاحة أمامه لحل المشكلة، ومهمة متخذ القرار فى هذا الصدد هى المفاضلة بين البدائل المختلفة لاختيار إحداها فى ضوء المعيار المطبق (تعظيم الربح أو تدنية التكاليف).

أى أن البيانات والمعلومات تكون متوفرة ومؤكدة بنسبة 100% لنتائج البدائل الموجودة، وما على متخذ القرار إلا القيام باختيار البديل صاحب أفضل نتيجة موجودة بين هذه البدائل.

ثانياً: اتخاذ القرار فى ظل حالة عدم التأكد:

تأتى هذه الحالة على عكس الحالة الأولى تماماً، حيث يكون متخذ القرار فى حالة من عدم التأكد، حيث لا يتوافر له أى معلومات من تجارب الماضى يمكن الاسترشاد بها فى حساب احتمالات حدوث حالات الطبيعة، أى لا يوجد توزيع احتمالى لتحقيق حالات الطبيعة. ويوجد أمام متخذ القرار عدة معايير يتم فى ضوئها اتخاذ القرار، وعلى متخذ القرار أن يتعرف على هذه المعايير

جميعاً، ثم يختار المعيار الأكثر مناسبة لسياسة منظمته وأهدافها وهذه المعايير هى:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الواقعية.

5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذه المعايير من خلال عرض المثال التالى.

مثال (1): يعبر جدول العوائد التالى عن الربح المحقق فى ظل ثلاثة بدائل وثلاث حالات متوقعة للطبيعة:

بدائل القرار	حالات الطبيعة		
	$ط_1$	$ط_2$	$ط_3$
البديل الأول	20	8	4-
البديل الثانى	14	12	4
البديل الثالث	8	2	8

والمطلوب: تحديد البديل الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية $\propto = 0.60$

5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل):

وفقاً لهذا المعيار فإن متخذ القرار يعتبر متفائلاً ، حيث يطلق على هذا المعيار معيار أكبر قيمة للحدود القصوى Maximax، حيث طبقاً لهذا المعيار يقوم متخذ القرار باختيار أكبر قيمة فى كل بديل متاح أمامه، ثم يقوم باختيار أكبر أعلى الأرقام فى حالة الأرباح أو أقل الأقل فى حالة التكاليف، ولهذا سمى هذا المعيار بمعيار التفاؤل.

ويوضح الجدول التالى كيفية اتخاذ القرار باستخدام هذا المعيار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1):

بدائل القرار	حالات الطبيعة			أفضل نتيجة فى كل بديل	أقصى الأقصى
	$ط_1$	$ط_2$	$ط_3$		
الأول	20	8	4-	20	20
الثانى	14	12	4	14	-
الثالث	8	2	8	8	-

يلاحظ من الجدول السابق أننا قمنا بإضافة عمود يمثل أفضل نتيجة لكل بديل نسجل فيه أفضل النتائج (الحد الأعلى)، ثم قمنا بإضافة عمود نوضح فيه أكبر قيمة (أقصى الأقصى) فنجد أن البديل الأول هو الأفضل، حيث أفضل الأفضل فى النتائج هو (20) وعلى ذلك ووفقاً لمعيار أقصى الأقصى يعتبر البديل الأمثل هو البديل الأول.

عيب هذا المعيار: هو أنه اهتمامه الوحيد منصب على أفضل نتيجة لكل بديل (قرار) مع تجاهل النتائج الأخرى، أى أن هذا المعيار ينحاز للجانب الايجابى للمخاطرة ويتجاهل الجانب السلبى لها.

فلو أمعنا النظر فى مصفوفة النتائج (جدول العوائد) لوجدنا أن البديل الأول يحقق أفضل نتيجة إذا سادت حالة الطبيعة ($ط_1$)، ولكن هذا البديل يقودنا إلى خسارة (–4) إذا سادت حالة الطبيعة ($ط_3$).

2– معيار أقصى الأدنى (المتشائم):

يطلق على هذا المعيار معيار أكبر قيمة فى الحدود الدنيا الخاصة بنتائج كل بديل Maximini. أى فى ظل هذا المعيار يفترض أن حالة الطبيعة التى ستسود هى تلك التى تحقق النتيجة الأسوأ، لذلك فعلى متخذ القرار أن يختار البديل الذى يعطى أكبر عائد أى أقصى الأدنى، مع ملاحظة أنه فى حالة التعامل مع مصفوفة نتائج تعطى التكاليف أو الخسائر فإن هذا المعيار يصبح أدنى الأقصى، أى تقليل (تدنية) أقصى خسارة ممكنة.

ويوضح الجدول التالى كيفية اتخاذ القرار باستخدام هذا المعيار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1):

بدائل القرار	حالات الطبيعة			أدنى نتيجة فى لكل بديل	أقصى الأدنى
	$ط_1$	$ط_2$	$ط_3$		
الأول	20	8	4–	4–	–
الثانى	14	12	4	4	4
الثالث	8	2	8	2	–

باستعراض مصفوفة النتائج وإضافة عمود يمثل أدنى نتيجة لكل بديل نسجل فيه أسوأ النتائج لكل بديل، ثم نقوم باختيار أفضل أسوأ النتائج، فنجد أن البديل الثانى هو الأفضل حيث أن أفضل أسوأ النتائج هى (4) والتى يحققها هذا البديل، وعلى ذلك ووفقا لمعيار أقصى الأدنى يعتبر البديل الثانى هو البديل الأمثل.

عيب هذا المعيار: هو أن اهتمامه الوحيد منصب على أدنى نتيجة لكل بديل مع تجاهل النتائج الأخرى، أى أن هذا المعيار يحتاط من الجانب السلبى للمخاطرة ويتجاهل الجانب الايجابى لها. فلو أمعنا النظر فى مصفوفة النتائج (جدول العوائد) لوجدنا أن البديل الثانى يحقق أدنى نتيجة إذا سادت حالة الطبيعة (ط$_3$) ولكن هذا البديل يقودنا إلى أرباح (12، 14) إذا سادت حالات الطبيعة (ط$_2$ ، ط$_1$) على التوالى.

3- معيار الاحتمالات المتساوية:

يعرف هذا المعيار بمعيار " لا بلاس" Laplace، وبمقتضاه يجب أن تكون لحالات الطبيعة احتمالات متساوية، حيث يتم حساب الوسط الحسابى لنتائج كل بديل على حدة، ثم يتم اختيار البديل صاحب أعلى وسط حسابى من بين تلك الأوساط الحسابية فى حالة تعظيم الربح واختيار البديل صاحب أقل وسط حسابى فى حالة تدنية التكاليف.

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذا المعيار فى اتخاذ القرار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1) كما يلى:

الوسط الحسابى للبديل الأول = $\frac{(4-) + 8 + 20}{3} = 8$

الوسط الحسابى للبديل الثانى = $\frac{4 + 12 + 14}{3} = 10$

الوسط الحسابى للبديل الثالث = $\frac{8 + 2 + 8}{3} = 6$

يتم اختيار البديل صاحب أعلى وسط حسابى، وهو البديل الثانى. وبالتالى وفقاً لمعيار الاحتمالات المتساوية يعتبر البديل الأمثل هو البديل الثانى صاحب أعلى وسط حسابى مقارنة بالبديلين الآخرين.

عيب هذا المعيار: كثير من الكتاب يهاجمون هذا المعيار على أساس أنه لا يعطى أساس سليم لاتخاذ القرار لاعتماده على عدد حالات الطبيعة عند حساب الوسط الحسابى، فكيف يتم اختيار أكبر وسط حسابى طالما أنه يفترض تساوى احتمالات تحقق حالات الطبيعة.

4- معيار الواقعية:

يطلق على هذا المعيار " ليونيد هورويز" ويجمع بين أفضل نتيجة وأسوأ نتيجة لكل بديل. كما يعرف أيضاً باسم معيار الوسط المرجح، فهو معيار توافقي بين معيارى التفاؤل والتشاؤم يقوم على حساب معامل الواقعية والذى تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح، حيث تقترب قيمته من الصفر فى حالة التشاؤم، وتقترب قيمته من الواحد الصحيح فى حالة التفاؤل، ويكون مجموع الرقمين (الاحتمالية) تساوى الواحد الصحيح.

وفى الغالب يقوم متخذ القرار باختيار رقماً بين (0.5) والواحد الصحيح للتعبير عن التفاؤل وباقى الواحد الصحيح للتعبير عن التشاؤم. وعند اتباع هذا المعيار يلزم اتباع الأتى:

أ- تحديد معامل الواقعية $\propto$ (دليل التفاؤل).

ب- تحديد دليل التشاؤم = $1- \propto$.

جـ- إختيار أقصى نتيجة وأدنى نتيجة لكل بديل.

د- تحديد قيمة معيار الواقعية

= $\propto$ (أقصى نتيجة لكل بديل) + ($1- \propto$) (أدنى نتيجة لكل بديل)

هـ- اختيار البديل صاحب أكبر قيمة لمعيار الواقعية.

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذا المعيار فى اتخاذ القرار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1) كما يلى:

حيث أن معامل الواقعية أو دليل للتفاؤل = 0.6

∴ دليل التشاؤم = 1− 0.6 = 0.4

*** قيمة معيار الواقعية للبديل الأول**

= 0.6 (20) + 0.4 (−4) = 10.4

(حيث أن أقصى نتيجة = 20، وأدنى نتيجة = (−4))

*** قيمة معيار الواقعية للبديل الثانى**

= 0.6 (14) + 0.4 (4) = 10

(حيث أن أقصى نتيجة =14، وأدنى نتيجة = 4)

*** قيمة معيار الواقعية للبديل الثالث**

= 0.6 (8) + 0.4 (2) = 5.6

(حيث أن أقصى نتيجة = 8، وأدنى نتيجة =2)

ثم نختار أكبر قيمة لمعيار الواقعية وهى (10.4) وبالتالى يصبح البديل الأمثل هو البديل الأول.

5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى)

يطلق على هذا المعيار معيار "سافاج Savage، كما يسمى أيضاً معيار الحد الأدنى للحدود القصوى Minimax، يأخذ هذا المعيار فى الحسبان **السف** أو الندم الذى يشعر به متخذ القرار بعد اتخاذه القرار، فإذا لم يأخذ القرار السليم فإنه يشعر بالأسف بمقدار الفرق بين أفضل نتيجة والنتيجة التى حصل عليها بالنسبة لبديل معين، بمعنى أنه إذا اختار متخذ القرار بديل معين ثم اتضح له أنه كان يمكن أن يحقق ربحاً أكثر لو اختار بديل آخر، وذلك لأن حالة الطبيعة التى حدثت مخالفة لما توقع متخذ القرار.

وبذلك يشعر متخذ القرار بالأسف والندم على الفرص الضائعة، لذلك يتم تحويل مصفوفة العوائد الأصلية إلى مصفوفة أسف (مصفوفة خسارة الفرصة البديلة).

ويمكن حساب خسارة الفرصة البديلة لكل حالة من حالات الطبيعة عن طريق طرح القيم الموجودة فى العمود الذى يمثل حالة الطبيعة من أقصى قيمة موجودة فى نفس العمود، وتكون القيمة صفر فى كل عمود هى أفضل نتيجة يمكن الحصول عليها فى حالة الطبيعة التى يمثلها كل عمود، أما القيم الموجبة فى كل عمود من أعمدة حالات الطبيعة فتعبر عن مقدار الأسف (خسارة الفرصة البديلة).

ووفقاً لهذا المعيار نقوم أولاً باختيار أكبر قيم للخسائر المتعلقة بالفرصة البديلة وذلك لكل بديل على حدة، ثم نقوم بعد ذلك باختيار البديل الذى يعطى أقل قيمة قصوى من الخسائر.

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذا المعيار فى اتخاذ القرار بالتطبيق على المثال السابق رقم (1) كما يلى:

أولاً: اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة وذلك لكل بديل كما يلى:

بدائل القرار	حالات الطبيعة			الحد الأعلى فى الصف	الحد الأدنى للحدود القصوى
	ط1	ط2	ط3		
الأول	صفر	4	12	12	–
الثانى	6	صفر	4	6	6
الثالث	12	10	صفر	12	–

*** تم اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة كما يلى:**

أ- بالنسبة للعمود الأول (حالة الطبيعة ط1) تم طرح قيم هذا العمود وهى (20، 14 ، 8) من أكبر قيمة فى هذا العمود وهى (20) وبالتالى تصبح قيم العمود الأول هى (صفر ، 6 ، 12) على التوالى.

ب- بالنسبة للعمود الثانى (حالة الطبيعة ط2) تم طرح قيم هذا العمود وهى (8، 12 ، 2) من أكبر قيمة فى هذا العمود وهى (12) وبالتالى تصبح قيم العمود الثانى هى (4 ، صفر ، 10) على التوالى.

جـ- بالنسبة للعمود الثالث (حالة الطبيعة ط3) تم طرح قيم هذا العمود وهى (-4 ، 4 ، 8) من أكبر قيمة فى هذا العمود وهى (8) وبالتالى تصبح قيم العمود الثالث هى (12 ، 4 ، صفر) على التوالى.

* وبعد اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة يتم تحديد الحد الأعلى فى كل صف (كل بديل) وهى بالترتيب (12 ، 6 ، 12)، ثم يتم اختيار البديل الذى يعطى أقل قيمة قصوى من الخسائر (الحد الأدنى للحدود القصوى) وهو هنا البديل الثانى. إذا وفقاً لمعيار الأسف أو الندم يعتبر البديل الثانى هو البديل الأمثل.

وفى نهاية عرضنا لهذا المعيار يجب أن ننوه بأن كل الخطوات السابقة تمت على مصفوفة النتائج (العوائد) التى تمثل أرباح، أما فى حالة استخدام مصفوفة نتائج تمثل تكاليف أو خسارة فيتم اتباع الآتى:

1- أحسن نتيجة فى كل عمود من أعمدة الطبيعة هى أقل رقم فى كل عمود.
2- يتم الوصول إلى مصفوفة خسارة الفرصة البديلة عن طريق طرح أقل قيمة فى كل عمود من جميع قيم العمود.
3- اختيار أكبر رقم أسف لكل بديل (الحد الأعلى فى الصف) وهو يمثل أكبر تكلفة إضافية يمكن تحملها لو كانت حالات الطبيعة لا تسير كما افترض متخذ القرار.
4- تطبيق معيار أدنى الأقصى وذلك باختيار البديل صاحب أدنى قيمة فى عمود الحد الأعلى فى الصف ليعبر عن البديل الأمثل.

ثالثاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة الخطر:

تأتى هذه الحالة فى مكان وسط بين الحالتين السابقتين، حيث تتوافر أمام متخذ القرار بعض البيانات والمعلومات وليس كلها، وبالتالى فالموقف فى هذه الحالة يخضع للاحتمالات.

وتتميز المشكلة فى حالة المخاطرة بوجود عدة بدائل، ووجود أكثر من عائد لكل بديل، ووجود عدة حالات للطبيعة مع معرفة الاحتمال المتوقع لحدوث كل منها.

وفى ضوء ذلك فإن متخذ القرار يحدد فى ظل بيئة الخطر احتمالات حدوث كل حالة من حالات الطبيعة (الحالات المستقبلية المتوقعة)، ويعتبر كل من أسلوب القيمة النقدية المتوقعة وكذلك أسلوب شجرة القرارات من أكثر الأساليب استخداماً فى اتخاذ القرارات فى ظل حالة الخطر. ويمكن إلقاء الضوء على كل أسلوب من هذين الأسلوبين وبيان كيفية استخدامه فى اتخاذ القراران فى ظل حالة الخطر فيما يلى:

القيمة النقدية المتوقعة: Expected Monetary Value (EMV)

تنطوى القيمة النقدية المتوقعة لبديل ما على القيم المختلفة لهذا البديل مرجحة باحتمالات حدوث كل قيمة، وتشير المعادلة التالية إلى الكيفية التى يتم بها حساب القيمة النقدية المتوقعة:

$$\text{ق}_{\text{ن م}} = \text{ق}_1 \times \text{ح}_1 + \text{ق}_2 \times \text{ح}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ق}_{\text{ن}} \times \text{ح}_{\text{ن}}$$

حيث أن:

$\text{ق}_{\text{ن م}}$: ترمز إلى إجمالى القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل.

ق_1 ... $\text{ق}_{\text{ن}}$: ترمز إلى القيم النقدية لكل بديل حسب ترتيبة الأول ثم الثانى......

ح_1 ... $\text{ح}_{\text{ن}}$: ترمز إلى احتمالات حدوث كل حالة مستقبلية مرتبة حسب ترتيبها الحالة الأولى ثم الحالة الثانية ....

وتعتمد هذه الطريقة على اختيار البديل (القرار) الذى يحقق أفضل قيمة نقدية متوقعة. ويتم حساب القيمة النقدية المتوقعة (EMV) لبديل ما من خلال مجموع حاصل ضرب العوائد المحتملة فى احتمالات حدوث تلك العوائد.
ويتحقق الحل فى ظل هذه الطريقة عن طريق الآتى:

أ- ضرب كل عائد فى احتمال حدوثه.

ب- جمع نتائج عمليات الضرب لكل بديل (قرار).

جـ- اختيار البديل الذى يحقق أكبر قيمة نقدية متوقعة.

ويقوم متخذ القرار بحساب القيمة المتوقعة للعائد من كل بديل ويختار البديل الذى يحقق أعلى عائد فى حالة كون العائد ربحاً أو اختيار البديل الذى يحقق أقل عائد فى حالة كون العائد تكاليف أو خسارة. وبناء عليه يمكن استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى حالة الأرباح وفى حالة الخسائر كما يلى:

أولاً: استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى حالة الأرباح:

تسمى طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى هذه الحالة بطريقة القيمة أو العائد المتوقع Expected Value Payoff ويمكن بيان كيفية استخدام هذه الطريقة فى اتخاذ القرارات فى ظل حالة الخطر من خلال عرض المثال التالى:

مثال (2): تواجه إحدى الشركات قرار بزيادة الطاقة الإنتاجية لمواجهة الطلب على منتجاتها. وقدرت دراسات الجدوى احتمالات الطلب بأن يكون منخفض أو متوسط أو مرتفع. وكانت احتمالات الحدوث لحالات الطلب هى: 0.40 ، 0.35 ، 0.25 على التوالى.

وانحصرت البدائل التى يمكن أن تلجأ إليها الشركة فى التشغيل ساعات إضافية أوزيادة قوة العمل أو العمل ورديات إضافية. والجدول التالى يظهر العائد المتوقع فى حالة تحقيق حالات الطلب المختلفة:

حالات الطلب / البدائل	مرتفع	متوسط	منخفض
الساعات الإضافية	180	140	100
زيادة قوة العمل	200	100	60
ورديات إضافية	400	40	صفر
الاحتمالات	0.25	0.35	0.40

المطلوب: استخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع فى تحديد البديل الأمثل للشركة.

الحـــل

يتم ايجاد القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلي:

*** القيمة النقدية المتوقعة لبديل الساعات الإضافية =**

(180 × 0.25) + (140 × 0.35) + (100 × 0.40) = 134

*** القيمة النقدية المتوقعة لبديل زيادة قوة العمل =**

(200 × 0.25) + (100 × 0.35) + (60 × 0.40) = 109

*** القيمة النقدية المتوقعة لبديل الورديات الإضافية =**

(400 × 0.25) + (40 × 0.35) + (صفر × 0.40) = 114

وفى ضوء ذلك يتم تفضيل البديل الأول (بديل الساعات الإضافية) باعتباره صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة مقارنة بالبديلين الآخيرين.

ثانياً: استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى حالة الخسائر:

تسمى طريقة القيمة النقدية المتوقعة فى هذه الحالة بطريقة خسارة الفرصة البديلة المتوقعة Expected Opportunity Loss ويؤدى استخدام هذه الطريقة إلى الوصول إلى نفس الحل الذى تم التوصل إليه فى ظل طريقة القيمة أو العائد المتوقع، حيث فى هذه الحالة يتم اختيار البديل الذى يحقق أقل خسارة متوقعة.

ويمكن تلخيص إجراءات الحل فى ظل هذه الطريقة على النحو التالى:

1- اعداد جدول أو مصفوفة خسارة الفرصة البديلة عن طريق أخذ أكبر رقم فى كل عمود (كل حالة من حالات الطبيعة) وطرح كل أرقام هذا العمود من هذا الرقم.

2- حساب القيمة المتوقعة للخسارة لكل بديل عن طريق ضرب كل احتمال فى رقم الخسارة المناظر ثم تجميع النواتج لكل بديل.

3- يتم اختيار البديل الذى يحقق أقل خسارة متوقعة.

مثال (3): فى المثال السابق (رقم 2) المطلوب استخدام طريقة خسارة الفرصة البديلة المتوقعة فى تحديد البديل الأمثل للشركة.

الحـــل

أولاً: اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة كما يلى:

* فى ظل الطلب المرتفع: يتم طرح أرقام عمود الطلب المرتفع وهى 180 ، 200 ، 400 من أكبر رقم فى هذا العمود وهو 400 وبالتالى تصبح أرقام خسارة الفرصة البديلة فى ظل الطلب المرتفع هى: 220 ، 200 ، صفر، على التوالى.

ويتم القيام بنفس الشئ فى ظل حالتى الطلب المتوسط والمنخفض.

ويعبر الجدول التالى عن مصفوفة خسارة الفرصة البديلة:

حالات الطلب / البدائل	مرتفع	متوسط	منخفض
الساعات الإضافية	220	صفر	صفر
زيادة قوة العمل	200	40	40
ورديات إضافية	صفر	100	100
الاحتمالات	0.25	0.35	0.40

ويمكن حساب القيم المتوقعة للخسارة فى ظل كل بديل على النحو التالى:

*** القيمة المتوقعة للخسارة لبديل الساعات الإضافية =**

(220 × 0.25) + (صفر × 0.35) + (صفر × 0.40) = 55

*** القيمة المتوقعة للخسارة لبديل زيادة قوة العمل =**

(200 × 0.25) + (40 × 0.35) + (40 × 0.40) = 80

*** القيمة المتوقعة للخسارة لبديل الورديات الإضافية =**

(صفر × 0.25) + (100 × 0.35) + (100 × 0.40) = 75

وفى ضوء ذلك يتم تفضيل البديل الأول (بديل الساعات الإضافية) باعتباره أقل قيمة متوقعة للخسارة مقارنة بالبديلين الآخرين. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الاعتماد على أى من الطريقتين طريقة القيمة أو العائد المتوقع وطريقة خسارة الفرصة البديلة سوف يؤدى إلى اختيار نفس البديل.

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة:

تظهر مشكلة تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة عندما يريد المدير الوصول إلى أفضل النتائج التى توضح له معلومات عن حالة السوق فى المستقبل، بحيث تساعده على تحسين تقديرات الاحتمالات الحالية لحالات الطبيعة عن طريق اعداد الدراسات اللازمة لتحقيق ذلك.

وبمعنى أخر فإن تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة يمكن المدير من تحديد القيمة التى يمكن أن يدفعها للحصول على المعلومات الناتجة عن إجراء مسح سوقى بخبرة عن حالة السوق خلال فترة مستقبلية. فعن طريق تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة يمكن للشركة أن تحدد الحد الأقصى لما يمكن أن تدفعه فى مقابل المعلومات التى تحسن من قراراتها.

وتجدر الإشارة إلى ضرورة التفرقة بين مصطلحين هامين وهما القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة والقيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة.

فمصطلح **القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة** يشير إلى العائد المتوقع فى الأجل الطويل لو أن متخذ القرار لديه المعلومات الكاملة قبل قيامه باتخاذ القرار. أما مصطلح **القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة** فيشير إلى النتائج المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة مطروحاً منها القيمة المتوقعة بدون المعلومات الكاملة (القيمة المتوقعة لأفضل بديل فى ظل المعلومات المتاحة) .

ويتم حساب القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة باستخدام المعادلة التالية:

*** القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة**

= (أفضل بديل فى الحالة المستقبلية الأولى × احتمال حدوث هذه الحالة)

+ (أفضل بديل فى الحالة المستقبلية الثانية × احتمال حدوث هذه الحالة)

+ (أفضل بديل فى الحالة المستقبلية الأخيرة × احتمال حدوث هذه الحالة)

*** أما القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة (أو قيمة المعلومات الكاملة)**

= القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة – القيمة المتوقعة لأفضل بديل فى ظل المعلومات المتاحة.

وفيما يلى توضيح لكيفية حساب قيمة المعلومات الكاملة من خلال المثال التالى:

مثال (4): يرغب أحد المستثمرين فى الإستثمار إما فى مجال تجارة السيارات أو فى مجال تجارة الأجهزة الكهربائية. فإذا علمت أنه فى حالة حدوث ركود نسبى فإن أرباح بيع السيارات ستكون 180000 باحتمال قدرة 0.4، وفى حالة حدوث رواج نسبى فإن أرباح بيع السيارات ستبلغ 260000. أما بالنسبة لمجال تجارة الأجهزة الكهربائية فإن الأرباح فى حالة حدوث ركود نسبى ستكون 168000، فى حين ستكون 280000 فى حالة حدوث رواج نسبى.

المطلوب:

1- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

2- للمساعدة فى حل المشكلة السابقة تقدم أحد الخبراء بعرض المعلومات السابقة نظير أتعاب قدرها 6000 جنيه فهل ستوافق على الإستعانة برأية أم لا؟

الحـــل

1- اعداد مصفوفة العوائد:

الحالات / البدائل	ركود نسبى	رواج نسبى
السيارات	180000	260000
الأجهزة الكهربائية	168000	280000
الاحتمالات	0.4	0.6

*** حساب القيمة المتوقعة لكل بديل:**

*** القيمة المتوقعة لتجارة السيارات =**

(0.4 ×180000) + (0.6 × 260000) = 228000 جنيه

*** القيمة المتوقعة لتجارة الأجهزة الكهربائية =**

=(0.4 × 168000) + (0.6 × 280000) = 235200 جنيه

∴ البديل الأفضل هو بديل تجارة الأجهزة الكهربائية.

*** وحتى يمكن حساب قيمة المعلومات الكاملة نتبع الخطوات التالية:**

1- حساب القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة =

أفضل بديل فى ظل حالة الركود النسبى × احتمال حدوث حالة الركود النسبى

+ أفضل بديل فى ظل حالة الرواج النسبى × احتمال حدوث حالة الرواج النسبى

= (0.4 × 180000) + (0.6 × 280000) = 240000 جنيه.

2- القيمة المتوقعة لأفضل بديل فى ظل المعلومات المتاحة = 235200 جنيه.

3- قيمة المعلومات الكاملة =

القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة - القيمة المتوقعة لأفضل بديل فى ظل المعلومات المتاحة

= 240000 - 235200 = 4800 جنيه.

المطلوب الثانى: نرفض عرض الخبير لأن تكلفة المعلومات = 6000 جنيه وهى أكبر قيمة المعلومات الكاملة وهى 4800 جنيه.

تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يمثل تحليل الحساسية مدخلاً لبيان كيفية تأثير أى تغيير فى التقدير الخاص باحتمالات حدوث الحالات المستقبلية على القرار.

ويوضح المثال التالى كيفية إجراء تحليل الحساسية:

مثال (5): يعبر الجدول عن الأرباح المتوقعة لإحدى المشكلات التى يتوافر فيها ثلاثة بدائل وحالتين من الحالات المستقبلية المحتملة:

الحالات / البدائل	$ص_1$	$ص_2$
البديل الأول	**40000**	**- 36000**
البديل الثانى	**20000**	**- 4000**
البديل الثالث	**15000**	**- 2500**

المطلوب: استخدم مدخل تحليل الحساسية لايجاد قيم الاحتمالات، وبيان تأثير أى تغيير فيها على القرار المتخذ.

الحـــل

تحليل الحساسية هو تحليل نستطيع من خلاله حساب المدى الذى يتم فيه تغيير احتمالات حدوث الحالات المستقبلية وأثر ذلك على القرار المتخذ وذلك من خلال الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: بفرض أن احتمال حدوث الحالة (ص$_1$) قيمة مقدارها = ح ، وبالتالى فإن احتمال حدوث الحالة (ص$_2$) = 1 – ح ،

ويتم حساب القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلى:

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول**

= 40000 ح + (– 36000) (1 – ح)

= 40000 ح – 36000 + 36000 ح

= 76000 ح – 36000 ← المعادلة الأولى

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى**

= 20000 ح + (– 4000) (1– ح)

= 20000ح – 4000 + 4000 ح

= 24000 ح – 4000 ← المعادلة الثانية

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث**

= 15000 ح + (– 2500) (1 – ح)

= 15000 ح – 2500 + 2500 ح

= 17500 ح – 2500 ← المعادلة الثالثة

وبناء على ذلك فإنه تم التوصل إلى المعادلات الثلاث التالية:

معادلة البديل الأول = 76000 ح – 36000

معادلة البديل الثانى = 24000 ح – 4000

معادلة البديل الثالث = 17500 ح – 2500

الخطوة الثانية: استخدام المعادلات الثلاث السابقة فى ايجاد الاحتمالات التعادلية والتى يمكن أن تتساوى عندها القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل مع البديل الآخر وذلك كما يلى:

الحالة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

76000 ح – 36000 = 24000 ح – 4000

52000 ح = 32000

∴ ح = 32000 ÷ 52000 = 0.6153846

الحالة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

76000 ح – 36000 = 17500 ح – 2500

58500 ح = 33500

∴ ح = 33500 ÷ 58500 = 0.5726495

الحالة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

24000 ح – 4000 = 17500 ح – 2500

6500 ح = 1500

∴ ح = 1500 ÷ 6500 = 0.2307692

ويلاحظ أنه لا يمكن لمتخذ القرار تفضيل بديل على بديل آخر عند كل احتمال تعادلى من الاحتمالات الثلاثة السابقة، حيث يتساوى تفضيل متخذ القرار للبديل الأول مع البديل الثانى عندما يكون الاحتمال = 0.6153846 ويتساوى تفضيله للبديل الأول مع البديل الثالث عندما يكون الاحتمال =0.5726495، ويتساوى تفضيلة للبديل الثانى مع البديل الثالث عندما يكون الاحتمال = 0.2307692

يتضح مما سبق أن الطريقة الجبرية لا تمكن متخذ القرار من تفضيل بديل على بديل آخر. ولذلك يمكن استخدام الطريقة البيانية لتحديد المدى الاحتمالى المتوقع وبيان مدى تأثيره على القرار المتخذ.

الطريقة البيانية: وفقاً لهذه الطريقة يتم اعداد رسم بيانى يعبر فيه المحور الأفقى عن الاحتمالات (ح)، بينما يعبر المحور الرأسى عن القيمة النقدية المتوقعة، ويتم تمثيل المعادلات الثلاثة السابقة باعتبارها معادلات خطية فى الشكل البيانى على النحو التالى:

الخطوة الأولى: رسم المعادلات الثلاثة:

المعادلة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

= 76000 ح − 36000

بافتراض أن: ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

= (76000 × صفر) − 36000 = − 36000 جنيه.

وبافتراض أن ح = 1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول =

(76000 × 1) − 36000 = 40000 جنيه.

وبالتالى يتم رسم خط هذه المعادلة بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، − 36000) ، (1 ، 40000).

المعادلة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

= 24000 ح − 4000

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

= (24000 × صفر) − 4000 = − 4000 جنيه.

وبافتراض أن ح = 1 ∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

= (24000 × 1) − 4000 = 20000 جنيه.

وبالتالى يتم رسم خط هذه المعادلة بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، − 4000) ، (1 ، 20000)

المعادلة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

= 17500 ح − 2500

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

= (17500 × صفر) − 2500 = − 2500 جنيه.

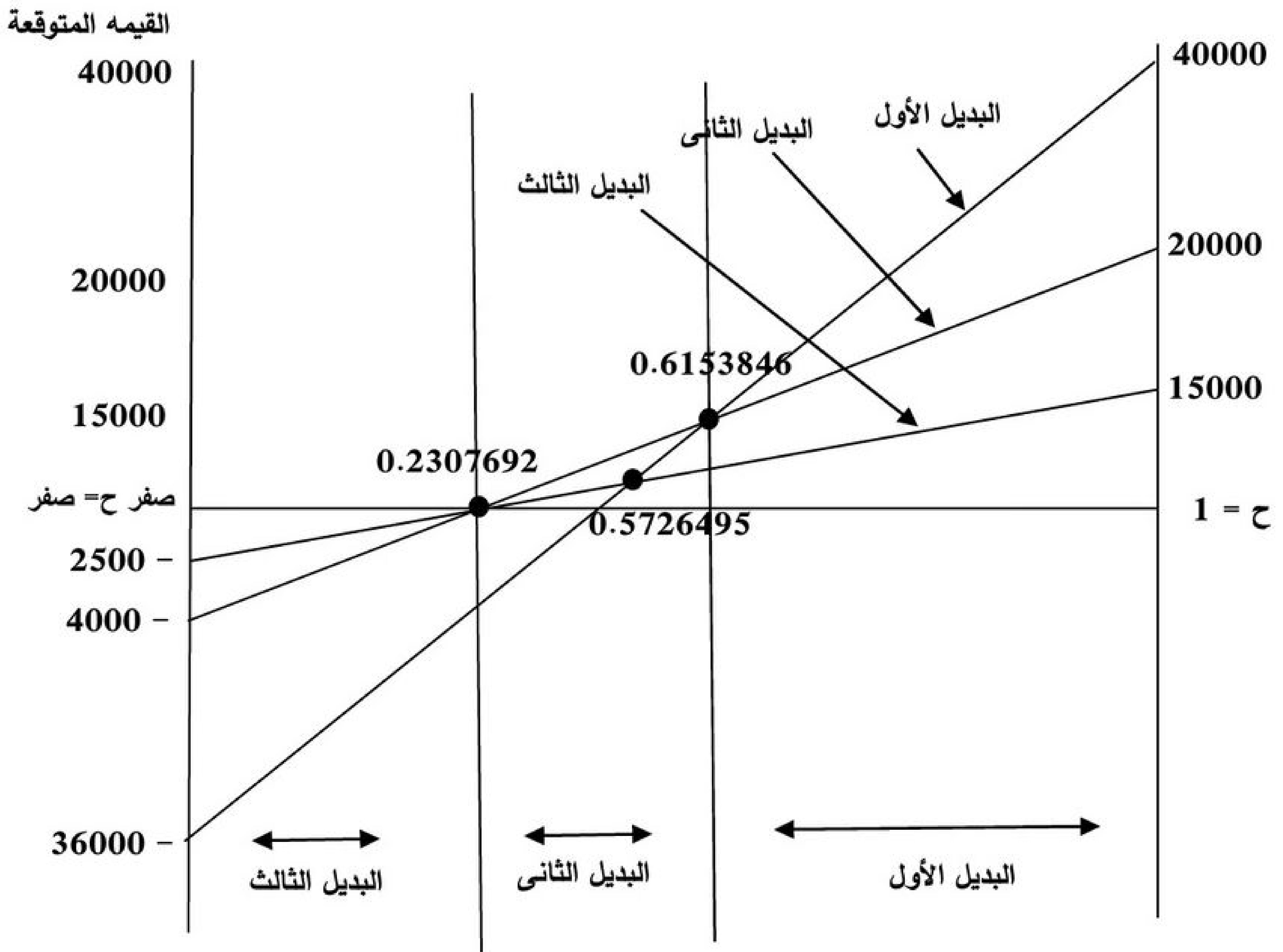
وبافتراض أن ح = 1 ∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

= (17500 × 1) − 2500 = 15000 جنيه.

وبالتالى يتم رسم خط هذه المعادلة بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، − 2500) ، (1 ، 15000).

وفى ضوء ذلك يمكن اعداد الرسم البيانى كما يلى:



ومن خلال تحليل الشكل البيانى فإنه يمكن تحديد المدى الاحتمالى المتوقع وبيان مدى تأثيره على القرار المتخذ عن طريق تحديد أفضل بديل يتناسب مع كل مدى احتمالى متوقع وذلك كما يلى:

1- يمكن لمتخذ القرار إذا كان الاحتمال المتوقع يقل عن 0.2307692 تفضيل البديل الثالث لأن هذا البديل سوف يظل دائماً صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة عند هذا المدى من الاحتمالات.

2- يتساوى البديل الثانى والثالث عندما تكون نسبة الاحتمال المتوقع = 0.2307692 بحيث يصعب على متخذ القرار تفضيل بديل على آخر، ويرجع ذلك إلى تساوى القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل منهما عند هذا الاحتمال.

3- يمكن لمتخذ القرار تفضيل البديل الثانى عندما تكون نسب الاحتمالات المتوقعة أكبر من 0.2307692 وأقل من 0.6153846، ويرجع ذلك إلى أن هذا البديل سوف يظل صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة فى ظل هذا المدى من الاحتمالات.

4- يتساوى البديلان الأول والثانى عندما تكون نسبة الاحتمال المتوقع = 0.6153846 ، ويرجع ذلك إلى تساوى القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل منهما مع الآخر عند هذا الاحتمال.

5- يمكن لمتخذ القرار تفضيل البديل الأول عندما تكون نسب الاحتمالات المتوقعة أكبر من 0.6153846، ويرجع ذلك إلى أن هذا البديل سوف يظل دائماً صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة فى ظل هذا المدى من الاحتمالات.

مثال (6): يعبر الجدول التالى عن العوائد المتوقعة لإحدى المشكلات التى تحتوى على ثلاثة بدائل وحالتين من الحالات المستقبلية المحتملة: (القيمة بالجنيه)

الحالات / البدائل	$ص_1$	$ص_2$
البديل الأول	30	20
البديل الثانى	20	24
البديل الثالث	16	40

فإذا علمت أن احتمال حدوث الحالة المستقبلية الأولى ($ص_1$) = 0.8

المطلوب:

1- باستخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع ماهو البديل الأفضل (الأمثل).

2- تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة.

3- استخدام مدخل تحليل الحساسية فى تحديد الاحتمال الخاص بالحالة المستقبلية (ص$_1$) والذى يجعل القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل أكبر ما يمكن.

الحـــل

1- تحديد البديل الأمثل: عن طريق ايجاد القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلى:

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول= (30× 0.8) + (20 × 0.2) = 28 جنيه.**

***القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى=(20 × 0.8) +(24 × 0.2)= 20.8 جنيه.**

***القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث=(16 × 0.8) + (40 × 0.2)= 20.8 جنيه.**

∴ البديل الأمثل هو البديل الأول لأنه صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة.

2- تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة:

= القيمة المتوقعة فى ظل المعلومات الكاملة - القيمة المتوقعة لأفضل بديل فى ظل المعلومات المتاحة

= [(30 × 0.8) + (40 × 0.2)] - 28 = 32 - 28 = 4 جنيه.

3- استخدام مدخل تحليل الحساسية فى تحديد الاحتمال الخاص بالحالة المستقبلية (ص$_1$) والذى يجعل القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل أكبر ما يمكن:

الخطوة الأولى: نفترض أن احتمال حدوث الحالة ص$_1$ = ح ، واحتمال حدوث الحالة ص$_2$ = 1 - ح

وتكوين معادلة القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلى:

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول**

= 30 ح + 20 (1 - ح) = 30 ح + 20 - 20ح = 10 ح + 20

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى**

= 20 ح + 24 (1 − ح) = 20 ح + 24 − 24 ح = − 4 ح + 24

*** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث**

= 16 ح + 40 (1 − ح) = 16 ح + 40 − 40 ح = − 24 ح + 40

وبناء على ذلك فإنه تم التوصل إلى المعادلات الثلاث التالية:

معادلة البديل الأول = 10 ح + 20

معادلة البديل الثانى = − 4 ح + 24

معادلة البديل الثالث = −24 ح + 40

الخطوة الثانية: ايجاد الاحتمالات التعادلية والتى تتساوى عندها القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل مع البديل الآخر كما يلى:

الحالة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

10 ح + 20 = − 4 ح + 24

14 ح = 4 ∴ ح = 4 ÷ 14 = 0.2857142 ≃ 0.28

الحالة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

10 ح + 20 = −24 ح + 40

34 ح = 20 ∴ ح = 20 ÷ 34 = 0.5882352 ≃ 0.59

الحالة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

−4 ح + 24 = −24 ح + 40

20 ح = 16 ∴ ح = 16 ÷ 20 = 0.8

الخطوة الثالثة: رسم المعادلات الثلاثة:

المعادلة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

= 10ح + 20

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = (10 × صفر) + 20 = 20

بافتراض أن ح = 1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = (10 × 1) + 20 = 30

وبالتالى يتم رسم خط المعادلة الأولى بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، 20) ، (1 ، 30)

المعادلة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

= −4 ح + 24

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى =(−4 × صفر)+ 24 = 24

بافتراض أن ح =1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى = (−4 × 1)+ 24 = 20

وبالتالى يتم رسم خط المعادلة الثانية بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، 24) ، (1 ، 20)

المعادلة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

= −24 ح + 40

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث = (−24 × صفر) + 40 = 40

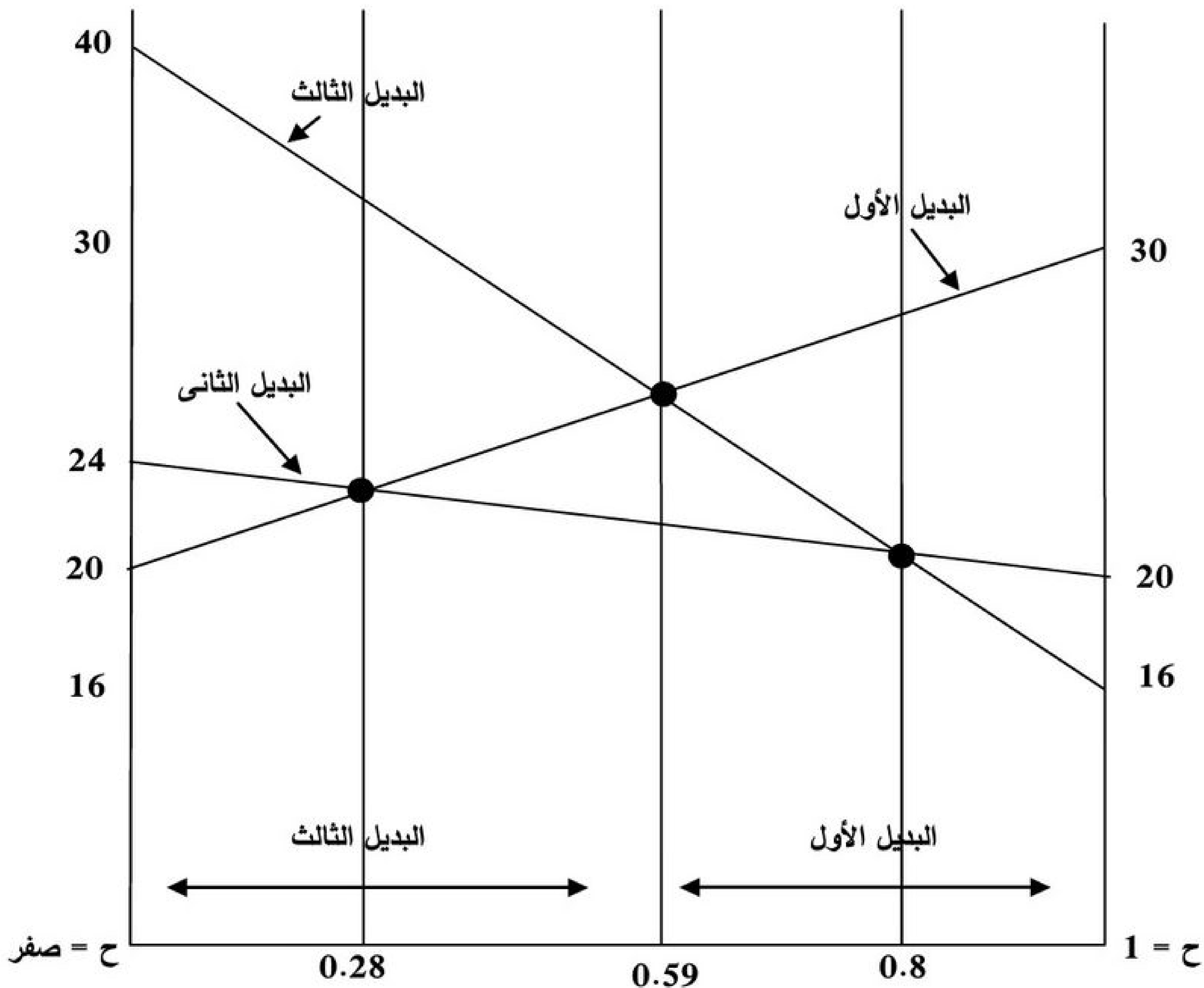
وبافتراض أن ح = 1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث = (−24 × 1) + 40 = 16

وبالتالى يتم رسم خط المعادلة الثالثة بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، 40) ، (1 ، 16)

وفى ضوء ذلك يتم اعداد الرسم البيانى كما يلى:



ومن خلال تحليل الرسم البيانى فإنه يمكن تحديد المدى الاحتمالى المتوقع وبيان مدى تأثيره على القرار المتخذ عن طريق تحديد أفضل بديل يتناسب مع كل مدى احتمالى متوقع كما يلى:

البديل الثانى لا يظهر أعلى بديل فى أى منطقة تقاطع بين الخطوط ولكن سيكون دائما البديل الثالث أو البديل الأول، وحيث أن نسبة الاحتمال التعادلى التى تتساوى عندها القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول مع البديل الثالث = 0.59

فيمكن أن نستخلص ما يلى:

1- إذا كانت احتمالات (ص$_1$) تساوى صفر إلى أقل من 0.59 فإن البديل الثالث هو البديل الأفضل.

2- إذا كانت احتمالات (ص$_1$) = 0.59 فإن البديل الثالث يتساوى مع البديل الأول.

3- إذا كانت احتمالات (ص$_1$) أكبر من 0.59 فإن البديل الأول هو البديل الأفضل.

فمثلاً إذا كان احتمال (ص$_1$) = 0.34 فإن البديل الثالث هو البديل الأفضل، أما إذا كان احتمال (ص$_1$) = 0.90 فإن البديل الأول هو البديل الأفضل.

شجرة القرار Decision Tree

تعتبر شجرة القرار من أهم الأساليب التى يمكن لمتخذ القرار استخدامها فى حل المشكلات ولاسيما تلك المشكلات التى تمر بعدة مراحل أى يمكن استخدامها لمعالجة حالة القرارات ذات المواقف المتتالية، فقد يرى متخذ القرار فى مرحلة معينة انشاء مصنع صغير ولكن بعد تغيير الحالة التى عليها الطلب قد يكون متخذ القرار فى موقف المفاضلة بين إضافة وحدة جديدة صغيرة أو إجراء توسع فى طاقة المصنع الحالى.

وشجرة القرار عبارة عن رسم تخطيطى يوضح البدائل المتاحة أمام متخذ القرار فى مواقف معينة والأثار المترتبة على كل بديل، وتتكون شجرة القرار من بعض الرموز الأساسية المتعارف عليها فى رسم الشجرة وهى:

☐ المربع الصغير والذى يستخدم للتعبير عن نقطة لاتخاذ القرار يبدأ من هذه النقطة فروع يمثل كل منها بديل متاح أمام متخذ القرار، ويجب عند هذه النقطة اختيار بديل من بين مجموعة البدائل المتاحة، وتبدأ شجرة القرار دائما بهذا الشكل.

الدائرة الصغيرة تستخدم أيضا للتعبير عن نقطة يبدأ منها فروع ولكن كل منها يرمز إلى حدث أو حالة مستقبلية سوف يواجهها متخذ القرار وتتعلق بالبدائل المتعلقة بحل المشكلة.

وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أن شجرة القرار يكتب عليها نوعين من المعلومات وهما النتائج المترتبة على كل بديل، واحتمالات حدوث الحالات المستقبلية المحتملة.

وكذلك يتم حساب القيم النقدية المتوقعة للبدائل من خلال ضرب قيم العوائد فى احتمالاتها.

وتجدر الإشارة كذلك إلى أن أسلوب شجرة القرار يستخدم لحل المشاكل التى تحتوى على قرار واحد، وكذلك حل المشاكل التى تحتوى على قرارين ويكون القرار الثانى معتمداً على القرار الأول وتسمى هذه الحالة بحالة المواقف أو القرارات المتتابعة.

مثال(7): يفكر مجموعة من المستثمرين فى بناء مصنع للطاقة الشمسية ونظراً لضخامة حجم الاستثمار قام المستثمرون بإجراء دراسة للمشروع قبل القيام به، وتتكلف تلك الدراسة 20000 جنيه، وقد تكون نتائج الدراسة ناجحة أو فاشلة. وهناك ثلاثة بدائل أمام المستثمرين وهى: بناء مصنع كبير أو بناء مصنع صغير أو عدم بناء مصنع. فإذا علمت أن الأرباح المتوقعة فى ظل بناء المصنع الصغير 120000 جنيه، وفى ظل بناء المصنع الكبير 180000 جنيه وذلك إذا كان السوق مشجعاً. أما إذا كان السوق غير مشجع فسوف تحدث خسارة قدرها 60000 جنيه فى حالة بناء المصنع الكبير، وخسارة قدرها 40000 جنيه فى حالة بناء المصنع الصغير. فإذا علمت أن السوق يمكن أن يكون مشجع باحتمال قدرة 40%، والدراسة احتمال أن تكون ناجحة باحتمال قدرة 90% إذا كان السوق مشجع، واحتمال أن تكون الدراسة فاشلة فى ظل سوق غير مشجع باحتمال قدرة 80%.

المطلوب: تحديد البديل الأمثل باستخدام أسلوب شجرة القرار.

الحــــل

لاحظ أن المشكلة السابقة هى مشكلة القرارات المتتابعة وذلك لأنه لابد من اتخاذ قرارين متتابعين " القرار الثانى يعتمد على القرار الأول" وكل قرار له بدائل وله حالات مستقبلية.

* **القرار الأول:** هل يتم القيام بالدراسة أم لا، حيث يوجد بديلين هنا وهما: إجراء الدراسة أو عدم إجراء الدراسة وهل ستكون الدراسة ناجحة أو فاشلة فى حالة إجراء الدراسة.

* **القرار الثانى:** قرار الاستثمار (بناء مصنع كبير، بناء مصنع صغير، عدم بناء المصنع) ويتوقف ذلك على القرار الأول نتائج الدراسة وما إذا كانت ناجحة أو فاشلة.

ونظراً لتعقد عملية اتخاذ القرار فنحن لا نتعامل مع الاحتمالات البسيطة بل نتعامل مع ما يعرف بالاحتمالات الشرطية Conditional Probabilities وهى التى تتعلق بنتائج الحالات المحتمل مواجهتها بواسطة الشركة (سوق مشجع أو غير مشجع وذلك إذا كانت نتائج الدراسة ناجحة أو فاشلة).

فاحتمال وجود سوق مشجع أو غير مشجع يتوقف الأن على نتائج الدراسة وما إذا كانت ناجحة أو فاشلة.

خطوات حل المشكلة باستخدام شجرة القرار فى حالة وجود قرارين (فى حالة القرارات المتتابعة)

1- قراءة المشكلة جيداً واستخراج جدول القرار (العوائد المتوقعة).

2- استخراج جدول الاحتمالات المشروطة السابقة.

3- احتساب الاحتمالات المعدلة وذلك على خطوتين:

أ- حساب الاحتمالات الكلية.

ب- حساب الاحتمالات المعدلة.

4- بعد تجهيز الاحتمالات المعدلة يتم البدء فى رسم شجرة القرار والآن دعنا نطبق تلك الخطوات على المثال الحالى:

أولاً: حساب الاحتمالات المعدلة لحالات السوق (مشجع أو غير مشجع):

أ- يتم اعداد الاحتمالات الشرطية كما وردت فى المشكلة:

الحالات المستقبلية المتوقعة	الاحتمالات	نتائج الدراسة	
		ناجحة	فاشلة
سوق مشجع	0.4	0.9	0.1
سوق غير مشجع	0.6	0.2	0.8

ب- يتم حساب الاحتمالات الكلية لنتائج الدراسة كما يلى:

*** الاحتمال الكلى لنتائج الدراسة الناجحة**

$= (0.4 \times 0.9) + (0.6 \times 0.2) = 0.48$

*** الاحتمال الكلى لنتائج الدراسة الفاشلة**

$= (0.4 \times 0.1) + (0.6 \times 0.8) = 0.52$

لاحظ عزيزى القارئ أن مجموع الاحتمالات الكلية لنتائج الدراسة (ناجحة وفاشلة) لابد وأن يساوى الواحد الصحيح، أى أن

مجموع الاحتمالات الكلية = 0.48 + 0.52 = 1

لاحظ أن احتمال أن الدراسة ناجحة = 0.48 ، واحتمال أنها فاشلة = 0.52

جـ- حساب الاحتمالات المعدلة لكل حالة من حالات السوق في ظل نتائج الدراسة:

- في ظل نتائج الدراسة الناجحة

$$\text{الاحتمال المعدل لحالة سوق مشجع} = \frac{\text{ح (ناجحة في سوق مشجع)} \times \text{ح (سوق مشجع)}}{\text{ح (الكلى لنتائج الدراسة الناجحة)}}$$

$$\text{الاحتمال المعدل لحالة سوق مشجع} = \frac{0.4 \times 0.9}{0.48} = 0.75$$

$$\text{الاحتمال المعدل لحالة سوق غير مشجع} = \frac{0.6 \times 0.2}{0.48} = 0.25$$

أى أن ح (احتمال) دراسة ناجحة / سوق مشجع = 0.75

ح (احتمال) دراسة ناجحة / سوق غير مشجع = 0.25

لاحظ أن مجموع الاحتمالات المعدلة لحالات السوق مشجع وغير مشجع فى ظل نتائج الدراسة الناجحة = الواحد الصحيح أى 0.75 + 0.25 = 1

- في ظل نتائج الدراسة الفاشلة

$$\text{الاحتمال المعدل لحالة سوق مشجع} = \frac{0.4 \times 0.1}{0.52} = 0.077$$

$$\text{الاحتمال المعدل لحالة سوق غير مشجع} = \frac{0.6 \times 0.8}{0.52} = 0.923$$

أى أن ح (احتمال) دراسة فاشلة / سوق مشجع = 0.077

ح (احتمال) دراسة فاشلة / سوق غير مشجع = 0.923

لاحظ أن مجموع الاحتمالات المعدلة أيضاً = الواحد الصحيح.

- اعداد ملخص لما سبق احتسابه من احتمالات معدلة

نتائج الدراسة / الحالات	ناجحة (0.48)	فاشلة (0.52)
سوق مشجع	0.75	0.077
سوق غير مشجع	0.25	0.923

ثانياً: نبدأ فى رسم شجرة القرار، حيث نبدأ أولاً فى رسم قرار الدراسة (القرار الأول) ثم بعد ذلك نرسم القرار الثانى.

- **القرار الأول:** يتمثل فى القيام بالدراسة أو عدم القيام بالدراسة فى ظل حالتين وهما: الدراسة ناجحة أو فاشلة مع ملاحظة أن تكلفة الدراسة = 20000 جنيه.

- **القرار الثانى:** هو اختيار بديل من ثلاثة بدائل وهما:

بناء مصنع كبير، أو بناء مصنع صغير أو عدم البناء، فى ظل حالتين للسوق هما: سوق مشجع أو غير مشجع ويتمثل جدول العوائد المتوقعة الخاص بالمشكلة فيما يلى:

الحالات المستقبلية / البدائل	سوق مشجع	سوق غير مشجع
بناء مصنع كبير	180000	60000 −
بناء مصنع صغير	120000	40000 −
عدم بناء المصنع	صفر	صفر
الاحتمالات	0.4	0.6

لاحظ عند رسم شجرة القرار أن كل فرع خارج من بديل القيام بالدراسة نستخدم الاحتمالات المعدلة لحالتى السوق مشجع أو غير مشجع التى سبق حسابها، والعائد لابد أن نطرح منه تكلفة الدراسة كما هو مبين على الشجرة.

وكل فرع خارج من بديل عدم القيام بالدراسة نستخدم الاحتمالات الأصلية لحالات السوق (مشجع (0.4) ، وغير مشجع (0.6) ويتم استخدام العائد المتوقع بالكامل.

37600
القيام بالدراسة
37600
(1)
ناجحة (0.48)
100000
مصنع كبير
100000
(2)
مشجع (0.75)
160000
غير مشجع (0.25)
80000 -
مصنع صغير
60000
(3)
مشجع (0.75)
100000
غير مشجع (0.25)
60000 -
عدم البناء
20000 -
فاشلة (0.52)
20000 -
مصنع كبير
61520 -
(4)
مشجع (0.077)
160000
غير مشجع (0.923)
80000 -
مصنع صغير
47680 -
(5)
مشجع (0.077)
100000
غير مشجع (0.923)
60000 -
عدم البناء
20000-
عدم القيام بالدراسة
36000
مصنع كبير
36000
(6)
مشجع (0.4)
180000
غير مشجع (0.6)
60000 -
مصنع صغير
24000
(7)
مشجع (0.4)
120000
غير مشجع (0.6)
40000 -
عدم البناء
صفر



تم حساب القيم المتوقعة على الشجرة كما يلى:

الحدث (2): $(0.75 \times 160000) + (-80000 \times 0.25) = 100000$ جنيه.

الحدث (3): $(0.75 \times 100000) + (-60000 \times 0.25) = 60000$ جنيه.

الحدث(4): $(0.077 \times 160000) + (-80.000 \times 0.923) = -61520$ جنيه.

الحدث(5): $(0.077 \times 100000) + (-60000 \times 0.923) = -47680$ جنيه.

الحدث(6): $(0.4 \times 180000) + (-60000 \times 0.6) = 36000$ جنيه.

الحدث (7): $(0.4 \times 120000) + (-40000 \times 0.6) = 24000$ جنيه.

الحدث (1): $(0.48 \times 100000) + (-20000 \times 0.52) = 37600$ جنيه.

وبناء على رسم شجرة القرار فإن القرارات تتمثل فيما يلى:

القرار الأول: هو القيام بالدراسة لأنه البديل صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة (37600 جنيه) بالمقارنة بالبديل الثاني عدم القيام بالدراسة حيث بلغت القيمة النقدية المتوقعة له (36000 جنيه).

القرار الثانى:

- بناء مصنع كبير لو كانت الدراسة ناجحة لأن بديل بناء مصنع كبير بلغت القيمة النقدية المتوقعة له (100000 جنيه)، وهى أكبر من القيمة المتوقعة فى حالة بناء مصنع صغير (60000 جنيه).
- عدم بناء مصنع لو كانت الدراسة فاشلة لأنه يحقق أقل قيمة للخسارة 20000 جنيه.

تمارين علي الفصل السابع

تمرين (1): يعبر جدول العوائد التالى عن الربح المحقق فى ظل ثلاثة بدائل وأربع حالات متوقعة للطبيعة:

حالات الطبيعة / البدائل	ط1	ط2	ط3	ط4
البديل الأول	75	45	45	30
البديل الثانى	120	60	40	20
البديل الثالث	125	90	35	20

المطلوب: تحديد البديل الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية $\propto = 0.8$.

5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (2): لو أن متخذ القرار يواجه أربعة بدائل وأربع حالات مستقبلية متوقعة، وقد استطاع أن ينمى جدول الأرباح المتوقعة كما يلى:

الحالات المستقبلية / البدائل	ح1	ح2	ح3	ح4
البديل الأول	42	27	30	15
البديل الثانى	33	30	24	21
البديل الثالث	27	30	30	33
البديل الرابع	24	30	33	39

المطلوب: أ- إذا كان متخذ القرار لا يعرف ماهى احتمالات حدوث هذه الحالات المستقبلية فما هو البديل الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

ب- بفرض أن الجدول السابق يعكس تكلفة بدلاً من الربح فما هو البديل الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار الاحتمالات المتساوية.

3- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

تمرين (3): يعبر جدول العوائد التالى عن الربح المحقق فى ظل خمسة بدائل و خمسة حالات متوقعة للطبيعة:

حالات الطبيعة / البدائل	ن1	ن2	ن3	ن4	ن5
(1)	40	40	40	40	40
(2)	25	10 -	50	50	50
(3)	60 -	صفر	60	60	60
(4)	110 -	50 -	10	70	70
(5)	160 -	100 -	45-	20	80

المطلوب:

(أ) إذا كان متخذ القرار لا يعرف ما هى احتمالات حدوث هذه الحالات المستقبلية فما هو البديل الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية $\propto = 0.6$

5- معيار الأسف أوالندم (معيار أدنى الأقصى).

ب- بفرض أن الأرقام فى الجدول السابق تعكس تكلفة بدلاً من الربح، فما هو القرار الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الأسف أوالندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (4): بفرض أن متخذ القرار في التمرين رقم (2) قد استطاع تحديد احتمالات حدوث الحالات المستقبلية وكانت كما يلي: (0.50 ، 0.20 ، 0.20 ، 0.10) على التوالى.

المطلوب:

1- باستخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع ما هو البديل الأمثل.

2- بفرض أن الأرقام داخل الجدول (فى تمرين 2) تعكس تكلفة بدلاً من ربح استخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع فى تحديد البديل الأمثل.

3- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

تمرين (5): يعبر جدول العوائد التالى عن الربح المحقق بالجنيه فى ظل أربعة بدائل وأربعة حالات متوقعة للطبيعة واحتمالات حدوثها

حالات الطبيعة / البدائل	ع1	ع2	ع3	ع4
(1)	200	200	200	200
(2)	194	210	210	210
(3)	188	204	220	220
(4)	182	198	214	230
الاحتمالات	0.20	0.40	0.30	0.10

المطلوب:

أ- استخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع فى تحديد البديل الأمثل.

ب- استخدام طريقة خسارة الفرصة البديلة فى تحديد البديل الأمثل.

حـ- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

تمرين (6): يفكر مدير إحدى محلات الأجهزة الكهربائية فى تقديم جهاز كهربائى جديد، والمشكلة التى تواجهه هى تحديد عدد الوحدات التى يجب أن يطلبها من المستورد الرئيسى لهذا الجهاز. وكان سعر شراء الجهاز هو 440 جنيه وسعر بيعه هو 600 جنيه. ولكن المشكلة التى تواجه مدير المحلات هى عدم التأكد من كيفية التصرف فى الوحدات غير المباعة، حيث أنه سوف يضطر إلى التخلص منها بخصم 50% من سعر بيعها، ومن ناحية أخرى إذا جاء أحد العملاء ليطلب جهازاً ولم يجده فإن المحل يقدر تكلفة فقد فرصة بيعية بـ 50 جنيه. وفى ضوء خبرات هذا المدير فإنه استطاع أن يقدر احتمالات بيع عدد (صفر، 1، 2، 3) وحدات بمقدار 0.30 ، 0.40 ، 0.20 ، 0.10 على التوالى.

المطلوب:

1- تحديد أفضل عدد من الوحدات تنصح به المدير لشراؤه باستخدام:

أ- طريقة القيمة أو العائد المتوقع.

ب- طريقة خسارة الفرصة البديلة.

2- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

3- إذا لم يستطيع المدير تقدير احتمالات البيع فما هو عدد الوحدات التى تنصح المدير بشراؤه باستخدام معيار الأسف أوالندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (7): لو أن متخذ القرار يواجه ثلاثة بدائل وثلاث حالات مستقبلية متوقعة وقد استطاع أن ينمى جدول الأرباح المتوقعة كما يلى (القيمة بالجنيه):

الحالات المستقبلية المتوقعة / بدائل الاستثمار	انخفاض سعر الفائدة	ثبات سعر الفائدة	زيادة سعر الفائدة
البديل الأول	160	224	128
البديل الثانى	176	112	256
البديل الثالث	48	192	224

المطلوب:

أ- إذا كان متخذ القرار لا يعرف ما هى احتمالات حدوث هذه الحالات المستقبلية، فما هو البديل الأمثل فى ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية $\propto = 0.7$.

4- معيار الأسف أوالندم (معيار أدنى الأقصى).

ب- بفرض أن الجدول السابق يعكس تكلفة بدلاً من ربح فما هو البديل الأمثل فى ظل معيار الأسف أوالندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (8): بفرض أن متخذ القرار فى التمرين (رقم 7) قد استطاع تحديد احتمالات حدوث الحالات المستقبلية الثلاثة وكانت على التوالى كما يلى: 0.40 ، 0.30 ، 0.30.

المطلوب:

1- استخدام طريقة خسارة الفرصة البديلة فى تحديد ماهو البديل الأمثل.

2- تحديد قيمة المعلومات الكاملة.

تمرين (9): يعبر الجدول التالى عن الأرباح المتوقعة لإحدى المشكلات التى يتوافر فيها ثلاثة بدائل وحالتين للطبيعة:

الحالات المستقبلية / البدائل	$س_1$	$س_2$
البديل الأول	**240**	**150**
البديل الثانى	**195**	**255**
البديل الثالث	**90**	**300**

المطلوب: استخدم مدخل تحليل الحساسية لايجاد قيم الاحتمالات وبيان تأثير أى تغيير فيها على القرار المتخذ.

تمرين (10): إذا توافرت لديك البيانات التالية (الربح بالجنيه):

حالات الطبيعة / البدائل	رواج	كساد
$س_1$	90000	60000
$س_2$	60000	72000
$س_3$	48000	120000

المطلوب: استخدم مدخل تحليل الحساسية لايجاد قيم الاحتمالات لكل حالة من حالات الطبيعة وبيان تأثير أى تغيير فيها على القرار المتخذ.

تمرين (11): تفاضل شركة "أحمد محمود" بين شراء مكوانت الإنتاج من الموردين فى السوق أو القيام بتصنيعها بنفسها داخل مصانعها. وإذا كان الطلب على المنتج الخاص بالشركة عالياً فإن الشركة يمكن أن تحقق ربحاً من وراء عملية تصنيع مكونات الإنتاج، ولكن إذا كان الطلب على المنتج ذاته منخفضاً فإن تكلفة تصنيع المكونات ستكون عالية مقارنة بشرائها من الموردين. ويعبر الجدول التالى عن العوائد المتوقعة (بالألف جنيه) وذلك فى ظل البديلين (الشراء أو التصنيع):

حالات الطلب / البدائل	منخفض	متوسط	عالى
تصنيع المكونات	20 -	45	100
شراء المكونات	10	45	70

فإذا علمت أن احتمالات الطلب كما يلى: المنخفض = 0.35 ، والمتوسط = 0.35 ، والعالى = 0.30.

(1) باستخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع ماهو القرار الأفضل للشركة.

(2) ما هى قيمة المعلومات الكاملة لهذه المشكلة؟

(3) إذا علمت أن الشركة قد قررت إجراء دراسة للسوق وأن الدراسة يمكن أن تكون ناجحة أو فاشلة، كما أن الاحتمالات المتوقعة فى ظل نتائج الدراسة وحالات الطلب كما يلى:

حالات الطلب	نتائج الدراسة	
	الدراسة ناجحة	الدراسة فاشلة
منخفض	0.10	0.90
متوسط	0.40	0.60
عالى	0.60	0.40

قم بحساب الاحتمالات المعدلة لحالات الطلب فى ظل نتائج الدراسة.

(4) قم برسم شجرة القرار للمشكلة، ثم قم بتحديد القرار الأمثل للمشكلة على الشجرة (ملحوظة اظهر كل عملياتك الحسابية على الشجرة فى مكان منفصل وخارج الشجرة ولن ينظر إلى الأرقام على الشجرة وحدها ولكن إلى طريقة حسابها خارج الشجرة).

تمرين (12): يواجه مدير محل متخصص فى بيع الورد مشكلة تحديد أعداد الورد البلدى التى يطلبها يومياً، حيث يمكن أن يبيع يومياً إما 1000 أو 1500 أو 2000 أو 2500 من هذا الورد على حسب المناسبات، ويشترى هذا المحل الوردة بسعر 2 جنيه ويبيعها بسعر 3 جنيه. والمشكلة أن الوردة التى لا تباع فى نفس اليوم لا تصلح للبيع فى الأيام التالية وبالتالى فإن المحل يتخلص منها. والمطلوب مساعدة مدير المحل على تحديد الكمية المثلى للشراء يومياً والتى تعظم أرباحه من خلال:

1- تكوين جدول القرار (العوائد لهذه المشكلة).

2- ما هو القرار الأمثل فى حالة ما إذا كان هذا المدير متفائلاً، ومتشائماً؟

3- ماهو القرار الأمثل فى حالة تطبيق معيار الأسف أوالندم (معيار أدنى الأقصى) ؟

4- إذا كانت احتمالات الطلب متساوية فهل يمكنك تمثيل هذه المشكلة فى شكل شجرة القرار؟ وما هو القرار الأمثل فى هذه الحالة؟

5- ماهى قيمة المعلومات الكاملة لهذا القرار؟

تمرين (13): تخطيط إحدى الشركات لإنتاج كريم جديد لعلاج قشرة الشعر، ووفقاً للتقديرات التى أعدتها الشركة فإن ربح الوحدة المتوقع هو 10 جنيهات ويتطلب إنتاج هذا المنتج استثمار قدره 500000 جنيه وتتمثل حالات الطلب المتوقعة فى المستقبل واحتمالاتها كما يلى:

حالات الطلب المحتملة	30000 وحدة	40000 وحدة	50000 وحدة	60000 وحدة	70000 وحدة
الاحتمال	%5	%10	%20	%30	%35

المطلوب:

1- هل ينبغى على الشركة أن تقوم بإنتاج وتقديم هذا المنتج الجديد؟

2- هل يمكنك رسم شجرة القرار لهذه المشكلة؟ كيف؟

3- ما هى قيمة المعلومات الكاملة لهذه الشركة؟

الفصل الثامن

نظرية المباريات

Games Theory

- مقدمة.
- مفهوم نظرية المباريات.
- القيود المفروضة على استخدام نظرية المباريات.
- المفاهيم الأساسية التى يجب أخذها فى الحسبان عند تطبيق نظرية المباريات.
- خصائص نظرية المباريات.
- أنواع المباريات.
- خطوات تطبيق نظرية المباريات.
- نماذج نظرية المباريات:

النوع الأول: المباريات ذات الإستراتيجية الصافية.

النوع الثانى: المباريات ذات الإستراتيجية المختلطة.

- طرق حل المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة.

الطريقة الأولى: الطريقة الجبرية.

الطريقة الثانية: الطريقة الحسابية.

الطريقة الثالثة: طريقة الاحتمالات المشتركة.

الطريقة الرابعة: طريقة المباريات الفرعية.

- مفهوم قاعدة السيطرة (الحذف).
- تمارين للتدريب.

نظرية المباريات

مقدمة:

ترجع النشأة الأولى لنظرية المباريات إلى العالم الفرنسى "فون نيومان" Von Numan عندما أكتشفها وصاغ أفكارها النظرية فى عام (1928)، كما أنه من الناحية التطبيقية فقد جاءت المحاولة الأولى لتطبيقها من هذا العالم أيضاً، حيث قام بتطبيقها فى عام (1933) فى المجال الاقتصادي عندما قام بدراسة وتحليل المشكلات الخاصة بالاحتكار الثنائى والمتعدد.

وعلى الرغم من ذلك فإن نظرية المباريات لم تلقى الاهتمام الكافى ولم تستخدم بشكل واسع إلا بعد الحرب العالمية الثانية، وبالتحديد فى عام(1944) عندما تم عرضها فى كتاب كل من "فون نيومان وأوسكار مورجينسترن" تحت عنوان "نظرية وتطبيق المباريات والسلوك الاقتصادي" The Theory and Practice of Games and Economic Behavior والذى قدما من خلاله منهجاً جديداً لحل العديد من المشكلات الناتجة عن التنافس أو الصراع بين عدة اطراف بحيث يحاول كل طرف أن ينهى هذا التنافس أو الصراع لصالحة.

وقد أدى هذا الكتاب بما فيه من فكر وتطبيق إلى انتشار نظرية المباريات حيث تم تطبيقها فى العديد من المجالات، وخاصة مجال الإدارة الهندسية وذلك لتقدير مدى النجاح فى المنافسة بين شركتين متنافستين فى الأسواق عن طريق استخدام الأساليب الرياضية المتطورة لتحديد أفضل إستراتيجية تعظم العائد أو تقلل الخسائر إلى أقصى قدر ممكن.

فمن المعلوم أن أى منظمة لا تعمل فى فراغ، ولكنها تعمل فى بيئة متغيرة تؤثر فيها وتتأثر بها، وتحتوى البيئة المحيطة بأى منظمة على عدة متغيرات اقتصادية واجتماعية وسياسية بالإضافة إلى عوامل الخطر وعدم التأكد.

وقد ساهمت المتغيرات السابقة فى صعوبة وتحديد عملية اتخاذ القرارات، حيث أصبحت تلك العملية أكثر تعقيداً عن ذى قبل. ولهذا فإن عملية اتخاذ القرار تتطلب ضرورة الاعتماد على أسلوب يمكن من اتخاذ القرارات فى المواقف التى تتسم بالصراع، ومن ثم أصبحت العملية الإدارية كمباراة بين طرفين أو أكثر أحدهما متخذ القرار والباقى (طرف أو عدة أطراف) بمثابة خصوم لمتخذ القرار وتعتبر نظرية المبارايات من الأساليب التى تساهم فى ترشيد القرارات فى الحالات التى يحدث فيها تعارض مصالح.

مفهوم نظرية المبارايات:

نظرية المبارايات هى عبارة عن تكتيك يستخدم عند الرغبة فى اتخاذ القرارات التى تتطلب أخذ إستراتيجيات الأطراف الأخرى ذوى المصالح المتعارضة فى الاعتبار.

وينظر البعض لنظرية المبارايات على أنها وسيلة حديثة لدراسة اتخاذ القرارات فى حالة المواقف التى تتميز بالصراع، وينشأ الصراع أساساً فى حالة اختلاف أهداف الأطراف المتنافسة فى الموقف المعين. أى أن نظرية المبارايات ما هى إلا أداة من الأدوات الرياضية التى تساهم بشكل كفء وفعال فى حل المشكلات التى تواجه متخذى القرارات وذلك عند قيامهم بالبحث عن الإستراتيجيات المثلى سواء كانت إستراتيجيات الخصم معروفة لديهم أو غير معروفة.

وترجع صعوبة اتخاذ القرارات فى حالة المباراة، إلى أن كل من أطراف المباراة يريد تعظيم العائد (النتائج) لنفسه، وإلى أن القرار الذى يتخذه أحد أطراف المباراة يؤثر على الطرف الأخر، لذلك فعلى متخذ القرار أن يضع فى اعتباره رد الفعل الذى سيحدثه قراره على الطرف الأخر واحتمالات الأفعال التى سيقوم بها الطرف الأخر كنتيجة للقرار الذى اتخذه الطرف الأول.

ويتم استخدام نظرية المبارايات فى ظل قيود مفروضة عليها تتمثل فيما يلى:

1- ضرورة وجود هدف محدد لكل طرف من أطراف المباراة.

2- وجود عدد محدود من المشاركين فى المباراة.

3- يتاح لكل طرف فى المباراة عدد محدود من الإستراتيجيات.

4- تكون إستراتيجيات الأطراف المشاركة فى المباراة مدروسة وقابلة للتطبيق.

5- يوجد عائد لكل إستراتيجية مستخدمة فى المباراة.

6- يعرف كل طرف مشترك فى المباراة إستراتيجيات الأطراف الأخرى المشاركة فى هذه المباراة، ولكنه لا يعرف ما يستخدم منها.

المفاهيم الأساسية التى يجب أخذها فى الحسبان عند تطبيق نظرية المبارايات:

(1) المبارايات Games

تدل كلمة المبارايات فى عرض نظرية المبارايات على وصف الأوضاع التى تعبر عن وجود صراع أو تعارض فى التفضيلات من نوع لآخر، حيث يقصد بالمباراة وجود صراع أو نزاع بين طرفين أو عدة أطراف، بحيث يسعى كل طرف إلى إنهاء هذا الصراع أو النزاع لصالحة عن طريق الفوز على منافسيه باستخدام كل المعلومات المتوفرة لديه أو لدى منافسيه، وذلك عن طريق استخدام التفكير المنطقى والأساليب الرياضية وصولاً إلى تحقيق أفضل إستراتيجية تحقق الفوز على الطرف أو الأطراف الأخرى، بحيث يتحقق فى النهاية إما تعظيم الأرباح أو تقليل الخسائر إلى أقل قدر ممكن.

وقد يكون المشترك فى المباراة شخصاً طبيعياً فرداً، أو فريقاً يتكون من الأفراد الطبيعين، كما قد يكون من الأشخاص ذات الصفة الاعتبارية كما فى حالة التنافس بين منظمات الأعمال. وتجدر الإشارة أنه توجد لكل مباراة قواعد خاصة بها واجراءات وافتراضات تقوم على أساسها.

(2) الإستراتيجية: تشمل الإستراتيجية مجموعة من البرامج التى تستخدم لتحقيق أهداف طرف معين من أطراف المباراة وذلك بغية إما تعظيم ربحه او

تدنية خسائره. فلكل طرف (لاعب) مجموعة من الإستراتيجيات يتعامل بها ومن خلالها فى ضوء استراتجيات اللاعب الأخر، ومن خلال العوامل التى يسيطر عليها كل لاعب، والقيمة التى يعطيها اللاعبون لكل نتيجة.

(3) **عائد الاستراتيجية:** يمثل عائد الإستراتيجية العائد الصافى الذى تحققه استراتيجية معينة. وكمثال إذا كان هدف الإستراتيجية هو زيادة عدد الوحدات المباعة أو زيادة عدد الوحدات المنتجة فإن عائد الإستراتيجية يتمثل فى عدد الوحدات المباعة أو المنتجة التى يمكن تحقيقها بعد تنفيذ الإستراتيجية. أما إذا كان هدف الإستراتيجية هو تعظيم الربح فإنه يتم قياس عائد الإستراتيجية بمقدار ما يتم تحقيقه من ربح بعد تنفيذ الإستراتيجية.

(4) **نتائج المباراة:** وهى النتائج المترتبة على تفاعل إستراتيجيات أطراف المباراة، حيث يمكن القول بأن نتيجة المباراة بالنسبة لأى لاعب تتوقف على نوع الإستراتيجية التى اتبعها هو، بالإضافة إلى الإستراتيجيات التى اتبعها المنافسون.

(5) **مصفوفة عوائد الاستراتيجية:** تمثل مصفوفة عوائد الإستراتيجية مجموعة العوائد التى يمكن لطرف معين أو لاعب معين أن يحققها فى ظل استخدام مختلف التوليفات من الإستراتيجيات الممكنة وذلك لمقابلة إستراتيجيات الطرف أو اللاعب الأخر.

خصائص نظرية المبارايات:

1- تتكون المباراة من عدد من اللاعبين (مباراة الطرفين، المباراة متعددة الأطراف).

2- يسيطر كل لاعب على مجموعة من الإستراتيجيات (مبارايات ذات إستراتيجية، ومبارايات متعددة الإستراتيجيات).

3- لكل لاعب دالة تفضيل تتأثر بأنواع الإستراتيجيات التى يتبعها اللاعبون فى المباراة.

4- هدف كل لاعب هو الحصول على أعلى عائد يتيح له قيمة عظمى من المباراة.

أنواع المبارايات:

يمكن تصنيف المبارايات اعتماداً على مجموعة من المعايير وهى:

1- من حيث عدد اللاعبين:

أ- المباراة ذات الطرفين: عدد المتنافسين إثنين فقط.

ب- المباراة متعددة الأطراف: المباراة بين أكثر من طرفين، حيث يزيد عدد المتنافسين عن اثنين.

2- من حيث عدد الإستراتيجيات: يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من أنواع المبارايات استناداً لعدد الإستراتيجيات حيث هناك:

أ- مباراة ذات إستراتيجيتين.

ب- مباراة متعددة الإستراتيجيات.

3- من حيث درجة الصراع أو النتيجة النهائية للمباراة:

يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من المبارايات استناداً إلى درجة الصراع أو النتيجة النهائية للمباراة وهى:

أ- مباراة تامة الصراع ذات المجموع الصفرى:

وهى المباراة التى يكون المجموع الجبرى لمكسب وخسارة الطرفين يساوى الصفر، وبالتالى فإن مكسب أحد اللاعبين يعد فى نفس الوقت خسارة للاعب الأخر، حيث يسعى كل طرف من أطراف المباراة إلى تعظيم مكاسبه إلى أقصى قدر ممكن، أو تدنية خسارته إلى أقل قدر ممكن.

ب- مباراة غير تامة الصراع ذات مجموع غير صفرى:

وهى المباراة التى يكون فيها مكسب أحد الأطراف أكبر أو أقل من خسارة الطرف الأخر.

4- من حيث التوازن: يمكن تصنيف المباريات حسب التوازن إلى نوعين هما:

أ- مباراة متوازنة ذات إستراتيجية واحدة: لكل لاعب فيها إستراتيجية مثلى واحدة ونقطة توازن يرتضيها الطرفين.

ب- مباراة غير متوازنة ذات إستراتيجيات مختلطة: حيث يستخدم كل طرف أكثر من إستراتيجية نظراً لعدم وجود نقطة توازن يرتضيها الطرفين.

والجدير بالذكر أن المباراة قد تأخذ خليط من بين هذه الأنواع معاً، فمثلاً قد تكون المباراة ذات طرفين وتامة الصراع (ذات مجموع صفرى) وذات إستراتيجيتين ومتوازنة، أو مباراة ذات طرفين وتامة الصراع ومتعددة الإستراتيجيات وغير متوازنة .... وهكذا ....

خطوات تطبيق نظرية المباريات:

1-اعداد مصفوفة العوائد لكل طرف فى المباراة.

2-البحث عن الإستراتيجية الأفضل لكل طرف.

3-الوصول إلى قيمة المباراة.

نماذج نظرية المباريات:

يتم التركيز فى هذا الكتاب على دراسة وتحليل نماذج المباريات تامة الصراع ذات المجموع الصفرى وتنقسم هذه المباريات طبقاً للإستراتيجيات التى يستخدمها كل طرف لتحقيق هدفه – سواء كان أقصى مكسب أو أدنى خسارة – إلى نوعين أساسيين وهما:

النوع الأول: المباريات ذات الإستراتيجية الصافية.

النوع الثانى: المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة.

ونتناول فيما يلى هذين النوعين من المباريات ذات المجموع الصفرى تامة الصراع.

النوع الأول: المباريات ذات الإستراتيجية الصافية: Pure Strategy Games

طبقاً لهذا النوع من المباريات يكون أمام كل طرف إستراتيجية واحدة مثلى من بين عدة إستراتيجيات متاحة يلعب بها خلال زمن المباراة من أجل تحقيق إما أقصى عائد أو أقل خسارة.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن الخطوة الأولى لتطبيق نظرية المباريات هى اعداد مصفوفة العوائد معبراً عنها فى صورة رقمية تمثل العائد لكل طرف.

فمثلاً بافتراض وجود لاعبين هما (س ، ص) وتعبر (س$_1$ ، س$_2$) عن إستراتيجيات اللاعب الأول (س)، وتعبر (ص$_1$ ، ص$_2$) عن إستراتيجيات اللاعب الثانى (ص). وفيما يلى مصفوفة العوائد للمباراة بينهما:

		استراتيجيات اللاعب ص	
		ص$_1$	ص$_2$
استراتيجيات اللاعب س	س$_1$	8	28
	س$_2$	24	16-

ويلاحظ على مصفوفة العوائد ما يلى:

1- الصفوف تمثل إستراتيجيات اللاعب (الطرف) الأول، بينما تمثل الأعمدة إستراتيجيات الطرف (اللاعب) الثانى.

2- لابد أن يكون لكل طرف أكثر من إستراتيجية يمكنه الاختيار من بينها بما يحقق هدفه من المباراة.

3- تمثل الأرقام الموجبة فى المصفوفة مكاسب أو عوائد الطرف (اللاعب) الأول وتعتبر فى نفس الوقت خسائر للطرف (اللاعب) الثانى.

4- تمثل الأرقام السالبة فى المصفوفة خسائر للطرف (اللاعب) الأول وتعتبر فى نفس الوقت عوائد أو مكاسب للطرف (اللاعب) الثانى.

وفيما يلى شرح للأرقام الموجودة فى مصفوفة العوائد السابق عرضها:

يحقق اللاعب الأول (س) مكسباً قدره (8) إذا اتبع الإستراتيجية ($س_1$) وفى نفس الوقت اتبع اللاعب الثانى (ص) الإستراتيجية ($ص_1$)، فى حين يحقق اللاعب الثانى (ص) خسارة قدرها (-8) إذا اتبع الإستراتيجية ($ص_1$) وفى نفس الوقت اتبع اللاعب الأول (س) الإستراتيجية ($س_1$)، لذا سوف يحاول اللاعب الأول (س) تعظيم عوائده، فى حين يحاول اللاعب الثانى (ص) تدنية خسائرة.

ويوضح الجدول التالى شرح لمصفوفة عوائد المباراة بين اللاعب الأول (س) واللاعب الثانى (ص).

جدول عوائد المباراة

إستراتيجيات اللاعب (س)	إستراتيجيات اللاعب (ص)	العائد أو النتائج	
		اللاعب (س)	اللاعب (ص)
$س_1$	$ص_1$	مكسب = 8	خسارة = -8
$س_1$	$ص_2$	مكسب = 28	خسارة = -28
$س_2$	$ص_1$	مكسب =24	خسارة = -24
$س_2$	$ص_2$	خسارة = -16	مكسب= 16

فى ضوء عرض مصفوفة العوائد إذا ظهرت مصفوفة العوائد فى صورة أرقام موجبة فإنها تكون فى صالح الطرف الأول ومتحيزة ضد الطرف الثانى، بينما إذا ظهرت هذه المصفوفة فى صورة أرقام سالبة فإنها تكون فى صالح الطرف الثانى ومتحيزة ضد الطرف الأول.

ومن خلال تحليل أرقام مصفوفة العوائد فإنه يمكن تحديد نقطة التوازن أو التعادل وهى النقطة التى تنتج من تبنى كل طرف من أطراف المباراة للإستراتيجية المثلى التى يستخدمها خلال زمن المباراة. وتتحدد هذه النقطة عند الرقم الذى تتقاطع عنده الإستراتيجية المثلى التى يتبناها الطرف الأول مع الإستراتيجية المثلى التى يتبناها الطرف الثانى.

وبالتالى فإن نقطة التوازن هى النقطة التى يرتاح عندها كل طرف من طرفى المباراة ويرتضيان بنتيجتها، كما أن نقطة التوازن هى التى تحدد قيمة المباراة.
وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أنه يتم استخدام معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى لتمكين كل طرف من طرفى المباراة من اختيار لإستراتيجية المثلى له سواء كانت صافية أو مختلطة بحيث يحقق الهدف الذى يسعى إليه سواء تعظيم المكسب أو تدنية الخسارة.

وكقاعدة ثابتة يستخدم دائماً الطرف الأول فى المباراة معيار " أقصى الأدنى"، حيث يتوقع الطرف الأول أسوا النتائج (أى اختيار أقل قيمة فى كل صف)، ثم يقوم باختيار أفضلها أى تعظيم القيم الدنيا. أما الطرف الثانى فى المباراة فيستخدم دائماً معيار " أدنى الأقصى" حيث يتوقع الطرف الثانى أفضل النتائج (أى اختيار أكبر قيمة فى كل عمود) ثم يقوم باختيار أسوأ النتائج أى تدنية القيم العليا.

فإذا حدث أن تعادلت قيمة معيار " أقصى الأدنى" للطرف الأول معه قيمة معيار " أدنى الأقصى" للطرف الثانى، فإن هذه الحالة تمثل حالة توازن، حيث يكون كل طرف قد حقق هدفه الذى يسعى إليه وتتحدد قيمة المباراة النهائية بالقيمة المشتركة لهما، أما فى حالة عدم تعادل (تساوى) هاتين القيمتين فإن المباراة تكون غير متوازنة (غير مستقرة) وتتحدد قيمتها النهائية فى هذه الحالة بالمتباينة التالية :

أقصى الأدنى $\leq$ قيمة المباراة $\leq$ أدنى الأقصى

وعندئذ يتم استخدام العديد من الطرق الخاصة بالإستراتيجيات المختلطة كما سيتم عرضها فيما بعد.

معيار الحد الأقصى للحدود الدنيا Minimax Criterion

فى النمط المتشائم لصنع القرار، يحاول متخذ القرار إذا كان متشائماً اختيار الحدالأقصى للربح من بين الحدود الدنيا فى حالة الربح. أما فى حالة الخسارة، يحاول اللاعب اختيار الحد الأدنى للحدود القصوى من الخسائر. ففى ضوء نظرية المباراة يمكن استخدام معيار الحد الأقصى للحدود الدنيا من الأرباح وذلك بغرض اختيار الإستراتيجيات التى تعمل على تدنية الخسائر لكل لاعب. ويمكن استخدام الطريقة التقليدية "معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى فى تحديد الإستراتيجيات المثلى فى المبارايات ذات الإستراتيجية الصافية.

الطريقة التقليدية (المختصرة) "معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى"

يتم تطبيق الطريقة التقليدية (المختصرة) باتباع الخطوات التالية:

1- يتم تحديد أصغر رقم فى كل صف (الحد الأدنى للصف).

2- ثم يتم اختيار الرقم الأكبر من الأرقام الصغرى التى تم تحديدها فى الخطوة السابقة أى تطبيق معيار " أقصى الأدنى".

3- يتم تحديد أكبر رقم فى كل عمود (الحد الأقصى للعمود).

4- ثم يتم اختيار أصغر رقم من الأرقام الكبرى التى تم تحديدها فى الخطوة السابقة أى تطبيق معيار " أدنى الأقصى".

5- إذا تساوت قيمة معيار أقصى الأدنى مع قيمة معيار أدنى الأقصى بمعنى تساوت القيمة الأصغر للمباراة مع القيمة الأكبر للمباراة، فإن هذه القيمة تعنى نقطة التوازن (التعادل) للمباراة، وهى فى نفس الوقت تمثل قيمة المباراة. وفيما يلى نوضح كيفية استخدام الطريقة التقليدية (المختصرة) فى تحديد قيمة المباراة.

مثال(1):

فيما يلى مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين شركتين وهى الشركة (أ)، والشركة (ب). والمطلوب تحديد قيمة المباراة، وما هى الإستراتيجيات المثلى لكل شركة ؟

	استراتيجيات الشركة (ب)			
استراتيجيات الشركة (أ)	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$
$س_1$	50	80	16	25
$س_2$	30	5	14	95
$س_3$	70	40	15	30

الحـــل

يتم تطبيق خطوات تطبيق الطريقة التقليدية (المختصرة) كما يلى:

	الشركة (ب)					
	الإستراتيجية	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	أصغر رقم فى الصف
الشركة (أ)	$س_1$	50	80	16	25	16
	$س_2$	30	5	14	95	5
	$س_3$	70	40	15	30	15
	أكبر رقم فى العمود	70	80	16	95	أقصى الأدني (16) / أدنى الأقصى (16)

*** البحث عن الإستراتيجية الأفضل لكل شركة:**

*** بالنسبة للشركة (أ):**

نجد أسوأ النتائج لإستراتيجيتها الثلاث هى:

($س_1$) = 16 ← أقصى الأدنى

($س_2$) = 5

$(س_3) = 15$

∴ وفقاً لمعيار أقصى الأدنى تكون الإستراتيجية المثلى أو المفضلة للشركة (أ) هى الإستراتيجية $(س_1)$ ذات العائد (16)

*** بالنسبة للشركة (ب)**

نجد أن أفضل النتائج لإستراتيجيتها الأربع هى:

$(ص_1) = 70$

$(ص_2) = 80$

$(ص_3) = 16$ ← أدنى الأقصى

$(ص_4) = 95$

∴ وفقاً لمعيار أدنى الأقصى تكون الإستراتيجية المثلى (المفضلة) للشركة (ب) هى الإستراتيجية $(ص_3)$ ذات الخسارة (16).

بما أن نتيجة الشركة (أ) = (16)، وهى ذاتها الأفضل للشركة (ب) = (16).

∴ نحن أمام حالة توازن، والنتيجة (16) تمثل نقطة التوازن فى المباراة، وعلى ذلك تكون الإستراتيجية المثلى للشركة (أ) هى الإستراتيجية $(س_1)$ (الصف الأول)، وكذلك تصبح الإستراتيجية المثلى للشركة (ب) هى الإستراتيجية $(ص_3)$ (العمود الثالث).

*** قيمة المباراة:** فى هذه المباراة ذات المجموع الصفرى نجد ما يلى:

إن قيمة المباراة للشركة (أ) هى قيمة أقصى الأدنى = (16)، وأن قيمة المباراة للشركة (ب) هى قيمة أدنى الأقصى =(16)، وطالما أن أقصى الأدنى للصفوف يتعادل مع أدنى الأقصى للأعمدة

∴ نقطة التوازن هى (16).

∵ قيمة المباراة للشركة (أ) = (16).

وقيمة المباراة للشركة (ب) = (−16).

والمجموع الجبرى لنتيجة المباراة = 16 + (−16) = صفر

مثال(2): فيما يلى مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين الطرفين، الطرف الأول (س)، والطرف الثانى (ص):

الطرف الأول (س)	الإستراتيجية	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$
		الطرف الثانى (ص)			
	$س_1$	12	54	6-	66
	$س_2$	42	48	36	54
	$س_3$	18	24	12	24
	$س_4$	30-	18	30	12-

المطلوب:

1- تحديد نقطة التوازن وقيمة المباراة.

2- تحديد الإستراتيجية المثلى لكل طرف.

الحـــل

يتم تطبيق خطوات الطريقة التقليدية (المختصرة) كما يلى:

الطرف الأول (س)	الإستراتيجية	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	أصغر رقم فى الصف
		الطرف الثانى (ص)				
	$س_1$	12	54	6-	66	6-
	$س_2$	42	48	36	54	36
	$س_3$	18	24	12	24	12
	$س_4$	30-	18	30	12-	30-
	أكبر رقم فى العمود	42	54	36	66	أقصى الأدنى (36) / أدنى الأقصى (36)

- البحث عن الإستراتيجية المثلى لكل طرف:
- بالنسبة للطرف (س) ووفقاً لمعيار أقصى الأدنى تكون الإستراتيجية المثلى هى الإستراتيجية ($س_2$) (الصف الثانى) ذات العائد = (36).

- بالنسبة للطرف (ص) ووفقاً لمعيار أدنى الأقصى تكون الإستراتيجية المثلى هى الإستراتيجية (ص3)(العمود الثالث) ذات الخسارة = (36).
- نقطة التوازن = (36)
- قيمة المباراة للطرف (س) = (36)
- قيمة المباراة للطرف (ص) = (−36)
- المجموع الجبرى لنتيجة المباراة = 36 + (−36) = صفر.

النوع الثانى: المبارايات ذات الإستراتيجيات المختلطة: Mixed Strategy Games

الإستراتيجيات المختلطة هى التى تتضمن عدة إستراتيجيات يتبع أو يختار المتنافس كل إستراتيجية منها لفترة محددة من الوقت. ففى بعض الأحيان ونحن بصدد تحديد قيمة المباراة نجد أن المباراة ليس لها نقطة توازن (أى النقطة التى يرتضى الطرفان بها) وهذا يعنى أنه ليس هناك إستراتيجية صافية يمكن أن تحل المباراة من أولها لأخرها، لذلك نلجأ إلى اللعب بأكثر من إستراتيجية.

وطبقاً للمبارايات ذات الإستراتيجيات المختلطة يتبنى كل طرف من طرفى المباراة مزيجاً من الإستراتيجيات المتاحة لديه، بحيث يستخدم كل واحدة منها خلال نسبة معينة من وقت المباراة وذلك سعياً نحو تحقيق هدفه إما تعظيم مكاسبة إلى أكبر قدر ممكن أو تدنية خسائره إلى أدنى حد ممكن.

وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أنه عند حل أى مباراة يجب أولاً أن نحدد "نقطة التوازن" باستخدام الطريقة التقليدية "معيار أدنى الأقصى ومعيار أقصى الأدنى" فإذا تبين وجود هذه النقطة فى مصفوفة عوائد المباراة فهذا يعنى أننا قد توصلنا إلى حل المباراة وبالتالى تحديد قيمة المباراة والإستراتيجية المثلى التى يستخدمها كل طرف من طرفى المباراة والتى سوف يستخدمها طول وقت المباراة.

أما إذا لم توجد "نقطة التوازن" فإن ذلك يعنى عدم وجود إستراتيجية صافية لكل طرف متنافس، وإنما يلجأ كل طرف إلى استخدام العديد من الإستراتيجيات المتاحة لديه، أى يلعب كل طرف من طرفى المباراة بكل إستراتيجية نسبة من الوقت المخصص للمباراة.

وتوجد العديد من الطرق التى يمكن استخدامها لتحديد النسب من الأزمنة لاستخدام كل إستراتيجية من الإستراتيجيات المتاحة لدى كل طرف من طرفى المباراة ومن ثم تحديد قيمة المباراة والإستراتيجيات المثلى لكل طرف، وتتمثل هذه الطرق فيما يلى:

1- الطريقة الجبرية.

2- الطريقة الحسابية.

3- طريقة الاحتمالات المشتركة.

4- طريقة المبارايات الفرعية.

وفيما يلى نعرض لكيفية استخدام كل طريقة من الطرق السابقة.

الطريقة الأولى: الطريقة الجبرية:

تعتمد هذه الطريقة على استخدام الرموز وقواعد الجبر ومبادئ الاحتمالات فى تحديد نسبة أو احتمال اختيار كل إستراتيجية (صف لمتنافس الصفوف، عمود لمتنافس الأعمدة) حيث أن مجموع احتمالات الوقت المخصص لإستراتيجيات الصفوف تساوى الواحد الصحيح، وكذلك مجموع احتمالات الوقت المخصص لإستراتيجيات الأعمدة تساوى أيضاً الواحد الصحيح. ولهذا وباستخدام قواعد الجبر يتم توزيع احتمالات الوقت المخصص بين إستراتيجيات الصفوف والأعمدة كما يلى:

أ- تحديد نسب الوقت أو احتمال اختيار كل طرف لكل إستراتيجية من الإستراتيجيات المتاحة لديه، بمعنى إذا كان احتمال استخدام متنافس الصفوف (الطرف الأول) للإستراتيجية الأولى أو الصف الأول (ل) فإن

احتمال استخدامه للإستراتيجية الثانية أو الصف الثانى (1– ل). كذلك إذا كان احتمال استخدام متنافس الأعمدة (الطرف الثانى) للإستراتيجية الأولى (العمود الأول (ى) فإن احتمال استخدامه للإستراتيجية الثانية (العمود الثانى) (1– ى).

ب– يتم تكوين معادلات لكل طرف يتم من خلالها التوصل إلى المزيج الأمثل لإستراتيجياته المتاحة ومن ثم تحديد نسبة استخدامه لكل إستراتيجية وبناءاً عليه نستطيع تحديد قيمة المباراة. ويمكن توضيح كيفية استخدام هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية:

مثال(3): إذا كانت مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين الطرفين (أ)، (ب) كما يلى:

	الطرف (ب)		
	الإستراتيجية	ص1	ص2
الطرف (أ)	س1	4	16
	س2	20	12

المطلوب: أوجد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف، وتحديد قيمة المباراة وذلك باستخدام الطريقة الجبرية.

الحـــل

– البحث أولاً عما إذا كان لتلك المباراة "نقطة توازن" باستخدام الطريقة التقليدية "معيار أقصى الأدنى ومعيار أدنى الأقصى كما يلى:

	الطرف (ب)			
	الإستراتيجية	ص1	ص2	أصغر رقم فى الصف
الطرف (أ)	س1	4	16	4
	س2	20	12	12
	أكبر رقم فى العمود	20	16	أقصى الأدنى (12) / أدنى الأقصى (16)

وحيث أنه لا يوجد نقطة توازن مشتركة بين الطرفين، فإنه فى هذه الحالة سيقوم كل طرف باختيار مزيجاً من الإستراتيجيات المتاحة لديه، إلى أن يلتقى الطرفين فى نقطة توازن تقع بين (12) ، (16). وبالتالى كيف يمكن الوصول إلى نقطة التوازن باستخدام الطريقة الجبرية.

سوف نفترض أن الرموز المستخدمة كما يلى:

	نسب الوقت للطرف (ب)	ى	1 – ى
نسب الوقت للطرف (أ)	(ب) / (أ)	ص$_1$	ص$_2$
ل	س$_1$	4	16
1 – ل	س$_2$	20	12

ولايجاد قيم كل من (ل) ، (ى) فإن الأمر يتطلب تحديد المكسب المتوقع للطرف الأول (أ)، وتحديد الخسارة المتوقعة للطرف الثانى (ب) كما يلى:

*** المكسب المتوقع للطرف الأول (أ):**

البيان	عندما يستخدم (ب) (ص$_1$)	عندما يستخدم (ب) (ص$_2$)
عندما يستخدم (أ) (س$_1$) بنسبة (ل) من الوقت	4 ل	16 ل
عندما يستخدم (أ) (س$_2$) بنسبة (1– ل) من الوقت	20 (1 – ل)	12 (1– ل)
المكسب المتوقع	4 ل + 20 (1 – ل)	16 ل + 12 (1 – ل)

وبمساواة المكسب المتوقع الذى يحصل عليه الطرف(أ) عندما يلعب الطرف (ب) بإستراتيجية (ص$_1$) مع المكسب المتوقع للطرف (أ) عندما يلعب الطرف (ب) بإستراتيجية (ص$_2$) يمكن الحصول على قيمة (ل) كما يلى:

4 ل + 20 (1 – ل) = 16 ل + 12 (1 – ل)

20 – 16 ل = 12 + 4 ل

∴ 8 = 20 ل ∴ ل = $\frac{8}{20}$ = $\frac{2}{5}$

ومنها (1 – ل) = $\frac{3}{5}$

وبالتعويض عن قيم (ل) ، (1 – ل) فى المعادلة: 4 ل + 20 (1 – ل) نحصل على قيمة المباراة بالنسبة للطرف (أ) كما يلى:

4 ($\frac{2}{5}$) + 20 ($\frac{3}{5}$) = $\frac{8}{5}$ + $\frac{60}{5}$ = $\frac{68}{5}$ = 13.6

ويتضح مما سبق أن الطرف (أ) يستخدم الإستراتيجية (س$_1$) بنسبة ($\frac{2}{5}$) أي بنسبة (40%) من الوقت المخصص للمباراة ، ويستخدم الإستراتيجية (س$_2$) بنسبة ($\frac{3}{5}$) أي بنسبة (60%) من الوقت المخصص للمباراة. كما أن قيمة المباراة هى (13.6) وهذه القيمة تقع بين القيمتين 12 ، 16 اللذان توصلنا إليهما فى البداية عند تطبيق معيار أقصي الأدني وأدني الأقصي.

*** الخسارة المتوقعة للطرف الثانى (ب):**

البيان	يستخدم (ب) (ص$_1$) بنسبة (ى) من الوقت	يستخدم (ب) (ص$_2$) بنسبة (1– ى) من الوقت	الخسارة المتوقعة
عندما يستخدم (أ) (س$_1$)	4 ى	16 (1– ى)	4 ى+ 16 (1– ى)
عندما يستخدم (أ) (س$_2$)	20 ى	12 (1– ى)	20 ى+ 12(1– ى)

وبمساواة الخسارة المتوقعة للطرف (ب) عندما يلعب الطرف (أ) بإستراتيجية (س$_1$) مع الخسارة المتوقعة للطرف (ب) عندما يلعب الطرف (أ) بإستراتيجية (س$_2$) يمكن الحصول على قيمة (ى) كما يلى:

4 ى + 16 (1 – ى) = 20 ى + 12 (1 – ى)

16 – 12 ى = 12 + 8 ى

∴ 4 = 20 ى ∴ ى = $\frac{4}{20}$ = $\frac{1}{5}$

ومنها (1 – ى) = $\frac{4}{5}$

ويعنى ذلك أن الطرف (ب) يستخدم الإستراتيجية (ص$_1$) بنسبة ($\frac{1}{5}$) أي بنسبة (20%) من الوقت المخصص للمباراة، ويستخدم الاستراتيجية (ص$_2$) بنسبة ($\frac{4}{5}$) أي بنسبة (80%) من الوقت المخصص للمباراة.

وبالتعويض عن قيم (ى)، (1– ى) فى المعادلة: 4 ى + 16 (1 – ى) نحصل على قيمة المباراة بالنسبة للطرف (ب) كما يلى:

$$4\left(\frac{1}{5}\right) + 16\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{40}{5} + \frac{64}{5} = \left(\frac{68}{5}\right) = (13.6)$$

ومن هنا فإن قيمة المباراة للطرف (ب) = (13.6)، وهى تساوى قيمة المباراة للطرف (أ) ، وهذه القيمة تقع بين القيمتين 12 ، 16 اللذان حصلنا عليهما فى البداية عند تطبيق معيار أقصي الأدني وأدني الأقصي.

الخلاصة:

* قيمة المباراة = (13.6)

* الإستراتيجيات المثلى للطرف (أ) هى:

(س$_1$) ← بنسبة ($\frac{2}{5}$) أي بنسبة (40%) من الوقت المخصص للمباراة.

(س$_2$) ← بنسبة ($\frac{3}{5}$) أي بنسبة (60%) من الوقت المخصص للمباراة.

* الإستراتيجيات المثلى للطرف (ب) هى:

(ص$_1$) ← بنسبة ($\frac{1}{5}$) أي بنسبة (20%) من الوقت المخصص للمباراة.

(ص$_2$) ← بنسبة ($\frac{4}{5}$) أي بنسبة (80%) من الوقت المخصص للمباراة.

الطريقة الثانية: الطريقة الحسابية:

تستخدم هذه الطريقة فى حالة المبارايات التى يكون فيها أمام كل متنافس اختيارين أو إستراتيجيتين فقط، بمعنى يشترط لاستخدامها أن تكون مصفوفة العوائد للمباراة (2×2)، كما يتم استخدامها فى حالة عدم وجود نقطة توازن للمباراة مثلما هو الحال فى الطريقة الجبرية فى تحديد نسب الأوقات اللازمة لكل إستراتيجية من الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف من طرفى المباراة.

وتتمثل خطوات تطبيق الطريقة الحسابية فيما يلى:

1- اطرح أصغر قيمة من أكبر قيمة فى كل صف ثم ضع ناتج الطرح على يمين مصفوفة العوائد.

2- اطرح أصغر قيمة من أكبر قيمة فى كل عمود ثم ضع ناتج الطرح أعلى المصفوفة.

3- بدل مواقع ناتج الطرح بالنسبة للصفوف وكذلك الأعمدة.

4- اقسم كل قيمة مبدلة على مجموع تلك القيم المبدلة سواء فى الصف أو فى العمود، وبذلك نحصل على النسب المثلى لتقسيم زمن المباراة بين الإستراتيجيات المختلفة.

5- يتم ايجاد قيمة المباراة بالنسبة لكل متنافس كما يلى:

أ- قيمة المبارة لمتنافس الصفوف (الطرف الأول) تساوى مجموع حاصل ضرب نسبة كل صف × مجموع حواصل ضرب مفردات الصف × النسب المقابلة لها فى كل عمود

أى أن قيمة المباراة لمتنافس الصفوف (الطرف الأول) =

نسبة كل صف × مجـ (مفردات الصف × النسب المقابلة لها فى كل عمود)

ب- قيمة المباراة لمتنافس الأعمدة (الطرف الثانى) تساوى مجموع حاصل ضرب نسبة كل عمود × مجموع حواصل ضرب مفردات العمود × النسب المقابلة لها فى كل صف

أى أن قيمة المباراة لمتنافس الأعمدة (الطرف الثانى) =

نسبة كل عمود × مجـ (مفردات العمود × النسب المقابلة لها فى كل صف)

مثال(4): فى المثال السابق رقم (3) أوجد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف وتحديد قيمة المباراة باستخدام الطريقة الحسابية.

الحـــل

يتم تطبيق خطوات الطريقة الحسابية كما يلى:

1- طرح أصغر قيمة من أكبر قيمة فى كل صف وكل عمود وتكتب على يمين المصفوفة للصفوف وأعلاها للأعمدة وذلك كما يلى:

	ناتج طرح الأعمدة	16	4
ناتج طرح الصفوف	(ب) / (أ)	ص$_1$	ص$_2$
12	س$_1$	4	16
8	س$_2$	20	12

2- بدل مواقع ناتج الطرح بالنسبة للصفوف وكذلك الأعمدة كما يلي:

	تبديل الناتج	4	16
تبديل الناتج	(ب) / (أ)	ص$_1$	ص$_2$
8	س$_1$	4	16
12	س$_2$	20	12

3- اقسم كل قيمة مبدلة على مجموع تلك القيم المبدلة سواء فى الصف أو العمود، بمعنى ايجاد نسبة كل صف ونسبة كل عمود، ويعبر عن هذه النسبة

فى صورة كسر بسطة هو الرقم المبدل ناتج الطرح ومقامه هو حاصل جمع رقمى الطرح بعد التبديل وذلك كما يلى:

	نسبة العمود	$\frac{4}{20}$	$\frac{16}{20}$
نسبه الصف	(ب) / (أ)	ص1	ص2
$\frac{8}{20}$	س1	**4**	**16**
$\frac{12}{20}$	س2	**20**	**12**

4- تحديد قيمة المباراة:

أ- قيمة المباراة للطرف (أ)

= نسبة كل صف × مجـ (مفردات الصف × النسبة المقابلة لها فى كل عمود)

$$= \frac{8}{20}\ [\ 4 \times \frac{4}{20} + 16 \times \frac{16}{20}\ ] + \frac{12}{20}\ [\ 20 \times \frac{4}{20} + 12 \times \frac{16}{20}\ ]$$

$$= \frac{8}{20}\ [\ \frac{16}{20} + \frac{256}{20}\ ] + \frac{12}{20}\ [\ \frac{80}{20} + \frac{192}{20}\ ]$$

$$= \frac{8}{20}\ [\ \frac{272}{20}\ ] + \frac{12}{20}\ [\ \frac{272}{20}\ ] =$$

$$\frac{2176}{400} + \frac{3264}{400} = \frac{5440}{400} = (13.6)$$

وتشير هذه النتيجة إلى أنه الطرف (أ) تتمثل إستراتيجياته المثلى فى:

(س$_1$) ← بنسبة ($\frac{8}{20}$) أى ($\frac{2}{5}$) من الوقت المخصص للمباراة.

(س$_2$) ← بنسبة ($\frac{12}{20}$) أى ($\frac{3}{5}$) من الوقت المخصص للمباراة وقيمة المباراة بالنسبة للطرف (أ) = (13.6).

ب- قيمة المباراة للطرف (ب)

= نسبة كل عمود × مجـ (مفردات العمود × النسبة المقابلة لها فى كل صف)

$$= \frac{4}{20}\left[\frac{8}{20}\times 4 + \frac{12}{20}\times 20\right] + \frac{16}{20}\left[\frac{8}{20}\times 16 + \frac{12}{20}\times 12\right]$$

$$= \frac{4}{20}\left[\frac{32}{20} + \frac{240}{20}\right] + \frac{16}{20}\left[\frac{128}{20} + \frac{144}{20}\right]$$

$$= \frac{4}{20}\left[\frac{272}{20}\right] + \frac{16}{20}\left[\frac{272}{20}\right]$$

$$= \frac{1088}{400} + \frac{4352}{400} = \frac{5440}{400} = (13.6)$$

وتشير هذه النتيجة إلى أن الإستراتيجيات المثلى للطرف (ب) تتمثل فى:

(ص$_1$) ← بنسبة ($\frac{4}{20}$) أى ($\frac{1}{5}$) من الوقت المخصص للمباراة.

(ص$_2$) ← بنسبة ($\frac{16}{20}$) أى ($\frac{4}{5}$) من الوقت المخصص للمباراة

قيمة المباراة بالنسبة للطرف (ب) هى (13.6)

لاحظ: أن النتيجة التى توصلنا إليها باستخدام الطريقة الحسابية هى نفس النتيجة باستخدام الطريقة الجبرية.

الطريقة الثالثة: طريقة الاحتمالات المشتركة:

تهدف هذه الطريقة إلى تحديد قيمة المباراة من خلال ايجاد القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر مصفوفة عوائد المباراة وبجمع هذه القيم تتحدد قيمة المباراة.

حيث تقوم هذه الطريقة على أساس أن احتمال حدوث كل عنصر من عناصر مصفوفة عوائد المباراة تتمثل فى حاصل ضرب احتمال حدوث الصف والعمود اللذين يوجد بهما هذا العنصر. ومن خلال تحديد هذا الاحتمال يمكن تحديد القيمة المتوقعة للعنصر عن طريق ضرب هذا العنصر فى الاحتمال المشترك للعنصر.

بمعنى أنه يتم حساب القيمة المتوقعة لكل عنصر كما يلى:

القيمة المتوقعة للعنصر = قيمة العنصر × الاحتمال المشترك للعنصر

الاحتمال المشترك للعنصر = احتمال حدوث صف العنصر × احتمال حدوث عمود العنصر.

وفى ضوء ما سبق فإن استخدام طريقة الاحتمالات المشتركة لحساب قيمة المباراة تتطلب أولاً ضرورة تحديد احتمال استخدام كل متنافس لكل إستراتيجية من إستراتيجيات الصف والعمود.

وبتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق، حيث كانت مصفوفة العوائد كما يلى:

	نسبة العمود	$\frac{4}{20}$	$\frac{16}{20}$
نسبه الصف	(ب) / (أ)	ص1	ص2
$\frac{8}{20}$	س1	4	16
$\frac{12}{20}$	س2	20	12

* **القيمة المتوقعة للعنصر** = قيمة العنصر × الاحتمال المشترك للعنصر

ويوضح الجدول التالى كيفية حساب قيمة المباراة باستخدام هذه الطريقة:

عناصر مصفوفة العوائد	الاستراتيجيات التى توصل إلى عنصر العائد	الاحتمال المشترك	القيمة المتوقعة
4	س1 ، ص1	$\frac{8}{20} \times \frac{4}{20} = \frac{2}{25}$	$4 \times \frac{2}{25} = \frac{8}{25}$
16	س1 ، ص2	$\frac{8}{20} \times \frac{16}{20} = \frac{8}{25}$	$16 \times \frac{8}{25} = \frac{128}{25}$
20	س2 ، ص1	$\frac{12}{20} \times \frac{4}{20} = \frac{3}{25}$	$20 \times \frac{3}{25} = \frac{60}{25}$
12	س2 ، ص2	$\frac{12}{20} \times \frac{16}{20} = \frac{12}{25}$	$12 \times \frac{12}{25} = \frac{144}{25}$
قيمة المباراة			$\frac{340}{25} = 13.6$

لاحظ أنها نفس النتيجة التى تم التوصل إليها باستخدام الطريقة الجبرية والطريقة الحسابية.

الطريقة الرابعة: طريقة المباريات الفرعية:

تعتبر طريقة المباريات الفرعية إحدى الطرق التى تساهم فى حل نتائج المباريات الكبيرة والتى يصعب اختصار عناصرها إلى (2 × 2) حتى بعد استخدام قاعدة السيطرة وفى مثل هذه الحالات تستخدم طريقة المباريات الفرعية. وتعتمد تلك الطريقة على تقسيم مصفوفة عوائد المباراة إلى عدة مصفوفات أو مباريات فرعية بحيث تصبح كل مباراة فرعية (2 × 2) ثم تحل كل مباراة فرعية باستخدام إحدى طرق الحل السابقة.

مثال (5): إذا توافرت لديك مصفوفة عوائد إحدى المباريات بين الطرفين (س) ، (ص):

(ص) / (س)	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	$ص_5$	$ص_6$
$س_1$	**16**	**12-**	**20**	**4-**	**10**	**8**
$س_2$	**6**	**8**	**14**	**16-**	**18**	**12-**

المطلوب: استخدام طريقة المباريات الفرعية فى تحديد كل من:

1- الإستراتيجية المثلى لكل طرف.

2- قيمة المباراة.

الحـــل

* يلاحظ أنه لا يوجد نقطة توازن لهذه المصفوفة، وحيث أنها مصفوفة (2 × 6) فيجب استبعاد الإستراتيجيات التى لا تحقق أى عائد للطرف (ص)، وبفحص المصفوفة نجد أنه من مصلحة الطرف (ص) عدم استخدام الإستراتيجيات ($ص_1$ ، $ص_3$ ، $ص_5$) لأنها تمنح الطرف (س) فرصاً لتحقيق

الكسب وبالتالى يجب استبعاد تلك الإستراتيجيات من مصفوفة العوائد قبل حل المباراة.

وبعد استبعاد تلك الإستراتيجيات تصبح المصفوفة (2 × 3) كما يلى:

ص / س	ص2	ص4	ص6
س1	12-	4-	8
س2	8	16-	12-

وبناء على ذلك فإنه يتم تقسيم هذه المصفوفة إلى ثلاث مصفوفات أو مبارايات فرعية كما يلى:

*** المباراة الفرعية الأولى:**

ص / س	ص2	ص4
س1	12-	4-
س2	8	16-

*** المباراة الفرعية الثانية:**

ص / س	ص2	ص6
س1	12-	8
س2	8	12-

* **المباراة الفرعية الثالثة:**

ص / س	$ص_4$	$ص_6$
$س_1$	4-	8
$س_2$	16-	12-

ويتم حل كل مباراة فرعية من هذه المباريات الفرعية الثلاث باستخدام الطريقة الجبرية أو الطريقة الحسابية السابق تناولها.

مفهوم قاعدة السيطرة (الحذف):

تهدف قاعدة السيطرة إلى اختصار أو تخفيض عدد الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف فى المباراة وذلك عندما تكون الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف أكثر من اثنين، ويقال حينئذ أن المباراة تزيد عن (2×2). وبمقتضى هذه الطريقة يتم حذف بعض الإستراتيجيات "صفوف أو أعمدة" والتى ليس لها مبرر للاستخدام لأنها لا تمثل أى اضافة حقيقية لأى طرف من أطراف المباراة، أى أن حذفها لا يؤثر على نتيجة المباراة.

وتتلخص قاعدة السيطرة فى قاعدتين هما:

القاعدة الأولى: إذا كانت كل عناصر (أرقام) أحد الصفوف أقل من أو تساوى نظائرها فى صف أخر، يعتبر ذلك الصف الأقل صف مسيطر عليه ويمكن حذفه من المباراة.

القاعدة الثانية: إذا كانت كل عناصر (أرقام) أحد الأعمدة أكبر من أو تساوى نظائرها فى عمود أخر، يعتبر ذلك العمود عمود مسيطر عليه ويمكن حذفه من المباراة.

ويتم تطبيق قاعدة السيطرة بالنسبة لكل طرف فى المباراة وفقا لما يلى:

1- بالنسبة لمتنافس الصفوف (الطرف الذى يربح) يتم مقارنة كل إستراتيجيتين مع بعضهم البعض، فإذا كان هناك إستراتيجية (أى صف) أفضل من الأخري (الصف الأخر)، حيث تزيد أرباح تلك الإستراتيجية أو تتساوى مع أرباح الإستراتيجية الأخرى، ففى هذه الحالة يتم الإبقاء على الإستراتيجية الأفضل وحذف الإستراتيجية الأخرى دون أن يؤثر ذلك على قيمة المباراة.

2- بالنسبة لمتنافس الأعمدة (الطرف الذى يخسر) يتم مقارنة كل إستراتيجيتين مع بعضهم البعض، فإذا كان هناك إستراتيجية (أى عمود) أفضل من الإستراتيجية الأخرى (العمود الأخر)، حيث تقل خسائر تلك الإستراتيجية أو تتساوى مع خسائر الإستراتيجية الأخرى، ففى هذه الحالة يتم الإبقاء على الإستراتيجية الأفضل وحذف الإستراتيجية الأخرى دون أن يؤثر ذلك على قيمة المباراة.

وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أنه يمكن تطبيق قاعدة السيطرة على المبارايات ذات الإستراتيجية الصافية (ثم تحديد قيمة المباراة عن طريق تطبيق الطريقة التقليدية)، وكذلك على المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة (ثم ايجاد قيمة المباراة بأى طريقة ممكنة من الطرق التى سبق ذكرها).

مثال(6): فيما يلى مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين شركتين وهما: الشركة (أ) ، والشركة (ب):

ب / أ	$ص_1$	$ص_2$
$س_1$	12	-12
$س_2$	16	32
$س_3$	-24	-20

المطلوب:

1-تحديد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف.

2-تحديد قيمة المباراة.

الحـــل

لاحظ أن المصفوفة السابقة لا يوجد لها نقطة توازن، ومن ثم يجب إختصار تلك المصفوفة لتصبح (2×2) بالنسبة لإستراتيجيات الطرف (أ) فإننا نحاول استبعاد أى إستراتيجية منها حيث:

نقارن الإستراتيجية ($س_1$) مع الإستراتيجية ($س_2$) نجد أن الإستراتيجية ($س_1$) أفضل من ($س_2$) فى بعض الحالات، وفى حالات أخرى نجد ($س_2$) أفضل من ($س_1$) وبالتالى لا توجد إستراتيجية منها أفضل ومسيطرة على الأخرى. ونستمر فى المقارنة بين ($س_1$) و ($س_3$) نجد أن ($س_1$) أفضل من ($س_3$) فى بعض الحالات فقط. نستمر فى المقارنة بين ($س_2$) و ($س_3$) نجد أن ($س_2$) أفضل من ($س_3$) فى كل الحالات فإن الإستراتيجية ($س_3$) إستراتيجية مسيطر عليها ويجب استبعادها. وبالتالى تصبح المصفوفة (2×2) كما يلى:

ب / أ	$ص_1$	$ص_2$	أصغر رقم فى الصف
$س_1$	12	-12	-12
$س_2$	16	32	16
أكبر رقم فى العمود	16	32	أقصى الأدنى (16) / أدنى الأقصى (16)

* قيمة المباراة = (16)

* نقطة التوازن = (16)

* بالنسبة للطرف (أ) ووفقاً لمعيار أقصى الأدنى تكون الإستراتيجية المثلى له هى ($س_2$) ذات العائد = (16).

* بالنسبة للطرف (ب) ووفقاً لمعيار أدنى الأقصى تكون الإستراتيجية المثلى له هى (ص$_1$) ذات الخسارة = (16).

* المجموع الجبرى لنتيجة المباراة = 16 + (−16) = صفر.

مثال(7): بفرض أن هناك شركتين متنافستين لكل منهما (3) إستراتيجيات، ويوضح الجدول التالى عوائد المنافس (أ) وخسائر المنافس (ب):

ب / أ	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$
أ$_1$	4	3	5
أ$_2$	2	20	6
أ$_3$	1	2	3

المطلوب: تحديد قيمة المباراة والإستراتيجيات التى يلعب بها كل منافس؟

الحـــــل

نبحث أولاً عن وجود نقطة توازن لهذه المباراة باستخدام معيار أقصى الأدنى ومعيار أدنى الأقصى كما يلى:

ب / أ	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$	أصغر رقم فى الصف
أ$_1$	4	3	5	3
أ$_2$	2	20	6	2
أ$_3$	1	2	3	1
أكبر رقم فى العمود	4	20	6	أقصى الأدنى(3) / أدنى الأقصى (4)

يلاحظ أن المباراة ليس لها نقطة توازن وبالتالى لا توجد إستراتيجية صافية لكل طرف، ولكنها مباراة ذات إستراتيجيات مختلطة. الأمر الذى يتطلب تطبيق قاعدة السيطرة لتخفيض المصفوفة السابقة لتصبح (2×2) كما يلى:

بالنسبة للطرف (أ) نجد أن($أ_1$) مسيطرة على ($أ_3$) لذلك يمكن استبعاد الإستراتيجية ($أ_3$)، وبالنسبة للطرف (ب) نجد أن ($ب_1$) مسيطرة على ($ب_3$) لذلك يتم استبعاد الإستراتيجية ($ب_3$). وتصبح المصفوفة (2×2) بعد تطبيق قاعدة السيطرة كما يلى:

ب / أ	$ب_1$	$ب_2$
$أ_1$	**4**	**3**
$أ_2$	**2**	**20**

ويمكن استخدام إحدى طرق حل المبارايات ذات الإستراتيجيات المختلطة وبفرض تطبيق الطريقة الجبرية فإن النسب المختلفة لاستخدام الإستراتيجيات تكون كما يلى:

ل = $\frac{18}{19}$ ، 1 – ل = $\frac{1}{19}$

ى = $\frac{17}{19}$ ، 1 – ى = $\frac{2}{19}$

قيمة المباراة للطرف (أ) = $\frac{74}{19}$ = (3.9)

قيمة المباراة للطرف (ب) = (3.9)

لاحظ أن قيمة المباراة (3.9) تقع بين القيمتين (3 ، 4) اللذان حصلنا عليهما فى البداية عند تطبيق معيار أقصي الأدني وأدني الأقصي.

تمارين علي الفصل الثامن

تمرين (1): ما هى قيمة المباراة التالية، وما هى الإستراتيجية المثلى بالنسبه لكل من (أ)، (ب):

	الطرف (ب)		
الطرف (أ)	الإستراتيجية	ب1	ب2
	أ1	100	120
	أ2	120 -	140

تمرين (2): يرغب أحد الباحثين فى قسم إدارة الأعمال فى تكوين مصفوفة العوائد الخاصة بمباراة بين طرفين، الطرف الأول هو (أ) والطرف الثانى هو (ب). ويتوافر لدى كل منهما إستراتيجيتين (أ1 ، أ2) بالنسبة لطرف (أ)، أما الطرف الثانى (ب) فيتوافر لدية (ب1 ، ب2)، فإذا علمت أن إتباع الطرف (أ) للإستراتيجية (أ1) سوف يحقق له ربح قدره 200 جنيه إذا اتبع الطرف (ب) الإستراتيجية (ب1)، فى حين أن الطرف (أ) سوف يحقق فقط 40 جنيهاً ربحاً إذا اتبع (أ2) وفى نفس الوقت اتبع الطرف (ب) الإستراتيجية (ب2). ومن ناحية أخرى سوف يخسر الطرف (ب) 120 جنيهاً إذا اتبع الإستراتيجية (ب2) وفى نفس الوقت اتبع الطرف (أ) الإستراتيجية (أ1)، فى حين أن الطرف (ب) سوف يخسر 160 جنيه فى مواجهة الطرف (أ) إذا اتبع الإستراتيجية (ب1) فى الوقت الذى يتبع فيه الطرف (أ) الإستراتيجية (أ2).

المطلوب:

1- تكوين مصفوفة العوائد لهذه المباراة.

2- ما هى نقطة التوازن أو قيمة المباراة.

3- ما هى الإستراتيجية المثلى لكل طرف.

تمرين (3): إذا توافرت لديك مصفوفة العوائد التالية لإحدى المباريات بين الطرفين (س)، (ص):

الطرف (س)	الطرف (ص)				
	الإستراتيجية	ص1	ص2	ص3	ص4
	س1	100	10 -	82	18
	س2	82	54	72	64
	س3	36	18	36	54
	س4	18 -	46	28	46 -

المطلوب:

1- تحديد نقطة التوازن وقيمة المباراة.

2- تحديد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف فى المباراة.

تمرين (4): ما هى قيمة المباراة التالية وما هى الإستراتيجيات المثلى لكل طرف (أ) ، (ب): (ملحوظة استخدم الطريقة الحسابية فى حل المباراة وتحديد قيمتها).

ب / أ	ب1	ب2
أ1	60	56
أ2	52	68

تمرين (5): فى التمرين السابق (رقم 4) حدد قيمة المباراة والإستراتيجيات المثلى لكل طرف باستخدام الطريقة الجبرية.

تمرين (6): فيما يلى مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين شركتين وهى الشركة (س) والشركة (ص). والمطلوب تحديد قيمة المباراة

والإستراتيجيات المثلى لكل شركة (ملحوظة استخدم الطريقة الحسابية فى حل المباراة وتحديد قيمتها).

الشركة (ص) / الشركة (س)	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$
$س_1$	40	30	24	70
$س_2$	50	28	16	20
$س_3$	80	4	38	10
$س_4$	10 -	8	22	صفر

تمرين (7): فى التمرين السابق رقم (6)

المطلوب:

1- تحديد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لكل شركة باستخدام الطريقة الجبرية.

2- تحديد قيمة المباراة باستخدام طريقة الاحتمالات المشتركة.

تمرين (8): حدد قيمة المباراة التالية والاستراتيجية المثلى لكل من الطرفين (س) (ص):

ص / س	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$
$س_1$	180	160	140
$س_2$	200	200	160
$س_3$	220	180	210

تمرين (9): إذا توفرت لديك مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين الشركتين (م)، (ل):

ل / م	ل1	ل2	ل3	ل4
م1	20	60	50	30
م2	10	80	20	60
م3	30	50	10	20
م4	40	40	30	80

المطلوب:

تحديد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لكل شركة باستخدام:

1- الطريقة الجبرية.

2- الطريقة الحسابية.

3- طريقة الاحتمالات المشتركة.

تمرين (10):

حدد قيمة المباراة التالية والإستراتيجيات المثلى لكل طرف (أ)، (ب):

ب / أ	ب1	ب2	ب3
أ1	10 -	50	صفر
أ2	36	40	1 -

الفصل التاسع

نماذج تحليل شبكات الأعمال: تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع

- مقدمة.
- استخدام أسلوب المسار الحرج (CPM) فى تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع.
- استخدام أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT) فى تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع.
- تمارين للتدريب.

نماذج تحليل شبكات الأعمال: تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع

مقدمة:

تناولنا فى مقرر إدارة الإنتاج والعمليات نماذج تحليل شبكات الأعمال، حيث تناولنا كل من أسلوب المسار الحرج وأسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت) وكيفية تقدير الوقت المتوقع وكذلك كيفية حساب الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة لكل نشاط على شبكة الأعمال وذلك بهدف الوصول إلى المسار الحرج والذى يمثل أطول وقت على الشبكة من البداية إلى النهاية ويحدد ذلك المسار الحد الأدنى من الوقت اللازم لاتمام المشروع.

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد علاقة وثيقة بين كل من وقت تنفيذ المشروع وتكلفته، هذا ولابد من دراسة وتحليل هذه العلاقة، حيث يفيد ذلك فى توفير معلومات أمام القائمين على إدارة المشروع تمكنهم من المقارنة بين تنفيذ المشروع فى وقت عادى بتكلفة أقل، أو تنفيذ هذا المشروع فى وقت أقل بتكلفة مرتفعة وهى التى يطلق عليها عملية الإسراع فى تنفيذ المشروع.

ولتوضيح العلاقة بين كل من وقت وتكلفة تنفيذ المشروع فإن الأمر يتطلب ضرورة التعرف على بعض المصطلحات الأساسية والتى سيرد ذكرها فى إطار التعرض لهذا الموضوع وهى:

1- **الوقت العادى (Normal Time):** وهو الوقت الذى يمثل الاستخدام الكفء للموارد المتاحة واللازمة لأداء النشاط من عمالة وخامات وآلات .... الخ.

2- **الوقت المتسرع (Crash Time):** وهو يمثل الحد الأدنى الممكن من الوقت الذى يُخطط للنشاط أن يتم خلاله. ونصل إلى هذا الوقت عادة بزيادة الموارد المخصصة لأداء النشاط (أى عن طريق استخدام موارد اضافية).

3- **التكلفة العادية (Normal Cost)**: وهى التكاليف التى ترتبط أساساً بتنفيذ النشاط فى الوقت العادى.

4- **التكلفة المتسرعة (Crash Cost)**: وهى التكاليف التى يتحملها المشروع نتيجة لتنفيذ أنشطة المشروع فى أقل وقت ممكن، وهى التكاليف التى ترتبط أساساً بتنفيذ الأنشطة المختلفة للمشروع فى الوقت المتسرع. وعادة تكون تلك التكلفة أعلى من التكاليف العادية بسبب زيادة الأجور الاضافية أو زيادة التسهيلات الاضافية.

5- **ميل التكلفة (Cost Slope)**: يتم حساب ميل التكلفة لكل نشاط من أنشطة المشروع باستخدام المعادلة التالية:

$$\textbf{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادى} - \text{الوقت المتسرع}}$$

أى أن ميل التكلفة لأى نشاط يعادل الزيادة فى تكلفة النشاط مقسومة على النقص فى وقت النشاط.

استخدام أسلوب المسار الحرج (CPM) فى تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع:

مع أن أسلوب المسار الحرج فى جدولة وتخطيط المشروعات يحدد لنا أدنى زمن ممكن لتنفيذ المشروع إلا أن إدارة المشروع ترغب أحياناً وتضطر أحياناً أخرى للتعجيل فى انجاز المشروع بزمن أقل من ذلك الذى يحدده لنا المسار الحرج.

وتتم عملية التعجيل هذه بمحاولة الإسراع بتنفيذ واحد أو أكثر من الأنشطة الحرجة من خلال دفع تكاليف اضافية مقابل ذلك، فإذا تقرر الإسراع بزمن انتهاء المشروع المحدد وفقاً للمسار الحرج فإن الأمر يتطلب الإسراع بتكثيف

الجهود وما ينتج عن ذلك من زيادة فى التكاليف، فنصبح فى وضع مقايضة بين التخفيض فى زمن انتهاء المشروع وبين الزيادة فى التكلفة.

ولتوضيح العلاقة بين كل من وقت وتكلفة تنفيذ المشروع فإن الأمر يتطلب ضرورة التفرقة بين نوعين من التكاليف وهما:

النوع الأول: التكاليف المتغيرة (المباشرة): وهى التكاليف التى تتغير فى مجموعها بتغيير حجم النشاط. ويتم تخصيصها لهذا النشاط مثل تكاليف المواد المستخدمة لانجاز هذا النشاط، وتكاليف شراء المعدات، وتكاليف القائمين على التنفيذ (عمال، فنين، مهندسين).

النوع الثانى: التكاليف الثابتة (غير المباشرة): وهى التكاليف التى تخص المشروع أو مجموعة أنشطتة ككل، وهى التكاليف الثابتة فى مجموعها بغض النظر عن حجم أو مستوى النشاط ومن أمثلتها: المصاريف الإدارية ومصاريف التخطيط للمشروع والاشراف عليه.

ويمكن للقائمين على إدارة المشروع تخفيض وقت تنفيذ هذا المشروع من خلال اضافه المزيد من الموارد اللازمة لإتمام بعض الأنشطة مثل اضافه وتشغيل ألات جديدة أو استخدام عمالة أكثر مما يؤدى إلى زيادة التكاليف.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن الإسراع فى وقت تنفيذ المشروع من خلال تخفيض الفترة الزمنية اللازمة لانجازه يؤدى إلى زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة لتحمل المشروع لأجور اضافية أعلى من الأجور العادية أو شراء المشروع للخامات بسعر أعلى اختصاراً لفترة إتمام المشروع.

فى حين تعتبر التكاليف الثابتة تكاليف زمنية مرتبطة بالزمن، وبالتالى فإن الإسراع فى وقت تنفيذ المشروع من خلال تخفيض الفترة الزمنية اللازمة لانجازه يؤدى إلى تخفيض التكاليف الثابتة الخاصة بزمن إتمام هذا المشروع.

وهذه العلاقة بين التكاليف المتغيرة والتكاليف الثابتة وبين وقت تنفيذ المشروع يمكن توضيحها من خلال الشكلين التاليين رقم (9–1) ، (9–2):



شكل رقم (9–1): العلاقة بين التكاليف الثابتة ووقت تنفيذ المشروع.



شكل رقم (9–2): العلاقة بين التكاليف المتغيرة ووقت تنفيذ المشروع

وتتوقف عملية اتخاذ القرار على مدى العلاقة بين الزيادة فى التكاليف المتغيرة والنقص فى التكاليف الثابتة، فكلما كانت الزيادة فى التكاليف المتغيرة أعلى من الوفر الناشئ فى التكاليف الثابتة فإن القرار فى هذه الحالة عدم الإسراع بتنفيذ بعض الأنشطة الحرجة. أما إذا اتضح من التحليل أنه يترتب على الإسراع بتنفيذ بعض الأنشطة الحرجة وجود وفر فى التكاليف الثابتة للمشروع يزيد عن مقدار الزيادة فى التكاليف المتغيرة للأنشطة التى يتقرر ضرورة الإسراع بها القرار يكون بالإسراع.

وبالتالى فإن أسلوب المسار الحرج يقدم للإدارة فرصة للموازنة بين تخفيض التكاليف الثابتة عن طريق تخفيض وقت تنفيذ المشروع ككل، وبين زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة زيادة الموارد المطلوبة للإسراع فى تنفيذ بعض الأنشطة وبالتالى تخفيض وقت إتمام المشروع عن الوقت المحدد.

أى أن أسلوب المسار الحرج يهدف أساساً إلى الوصول إلى الحل الأمثل والذى يتمثل فى إحداث توازن بين وقت تنفيذ المشروع من ناحية، وبين كل من التكاليف الثابتة والمتغيرة من ناحية أخرى. فتعمل الإدارة على البحث عن النقطة من الزمن التى عندها يتحقق التوازن بين تخفيض التكاليف الثابتة نتيجة لتخفيض الوقت الكلى لإتمام المشروع وبين زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة الإسراع بتنفيذ بعض الأنشطة، وعند تلك النقطة من الزمن تكون التكاليف الكلية للمشروع عند أدنى حد لها.

ويمكن توضيح كيفية استخدام أسلوب المسار الحرج فى تحليل العلاقة بين وقت وتكاليف تنفيذ المشروع من خلال الأمثلة التالية:

مثال (1):

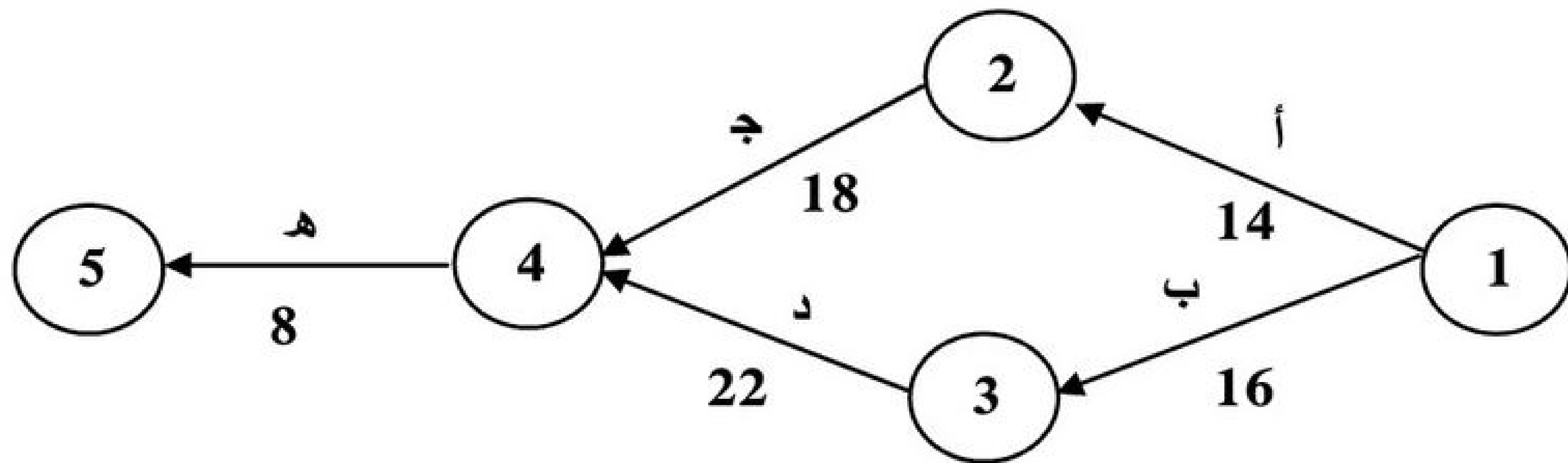
توفرت لديك البيانات التالية عن الأنشطة اللازمة للإنتهاء من إتمام إحدى المشروعات الهندسية، علماً بأن قيمة التكاليف الثابتة لهذا المشروع هى (2400) جنيه / اليوم.

النشاط	مسار النشاط	الوقت العادى باليوم	الوقت المتسرع باليوم	معدل الزيادة فى التكاليف المتغيرة جنيه / يوم
أ	2-1	14	14	-
ب	3-1	16	12	720
جـ	4-2	18	14	1200
د	4-3	22	18	1680
هـ	5-4	8	6	1440

المطلوب: تخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذى يمكن الوصول إليه.

الحـــل

الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال كما يلى:



الخطوة الثانية: تحديد المسار الحرج:

المسار الأول: 1 – 2 – 4 – 5

أ جـ هـ = 14 + 18 + 8 = 40 يوم

المسار الثانى: 1 – 3 – 4 – 5

ب د هـ = 16 + 22 + 8 = 46 يوم

∴ المسار الحرج هو المسار (ب د هـ) وزمنه = 46 يوم.

∴ الوقت العادى لإتمام للمشروع = وقت المسار الحرج = 46 يوم

* **تكاليف تنفيذ المشروع** = التكلفة المتسرعة + التكاليف الثابتة

= صفر + (2400 × 46) = 110400 جنيه

لاحظ أنه تم إهمال التكلفة المتسرعة وهى التكلفة المتغيرة للأنشطة.

الخطوة الثالثة: تحديد حدود فترة التخفيض ومعدل الزيادة فى التكلفة المتغيرة لكل نشاط من أنشطة المشروع كما يتضح فى الجدول التالى:

النشاط	معدل الزيادة فى التكلفة المتغيرة يومياً	حدود فترة التخفيض= الوقت العادى– الوقت المتسرع
أ	–	14–14 = صفر
ب	720	16–12 = 4 يوم
جـ	1200	18–14 = 4 يوم
د	1680	22–18 = 4 يوم
هـ	1440	8–6 = 2 يوم

الخطوة الرابعة: إجراء عملية التخفيض الممكنة:

التخفيض الأول: نركز على أنشطة المسار الحرج (ب د هـ)

حيث نجد أن معدل الزيادة فى التكلفة المتغيرة فى اليوم

للنشاط (ب) = 720 جنيه

للنشاط (د) = 1680 جنيه

للنشاط (هـ) = 1440 جنيه

∴ يتم اختيار النشاط (ب) صاحب أقل معدل زيادة فى التكلفة المتغيرة، وحدود فترة التخفيض للنشاط (ب) = 16 – 12 = 4 أيام.

وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بعمل الآتى:

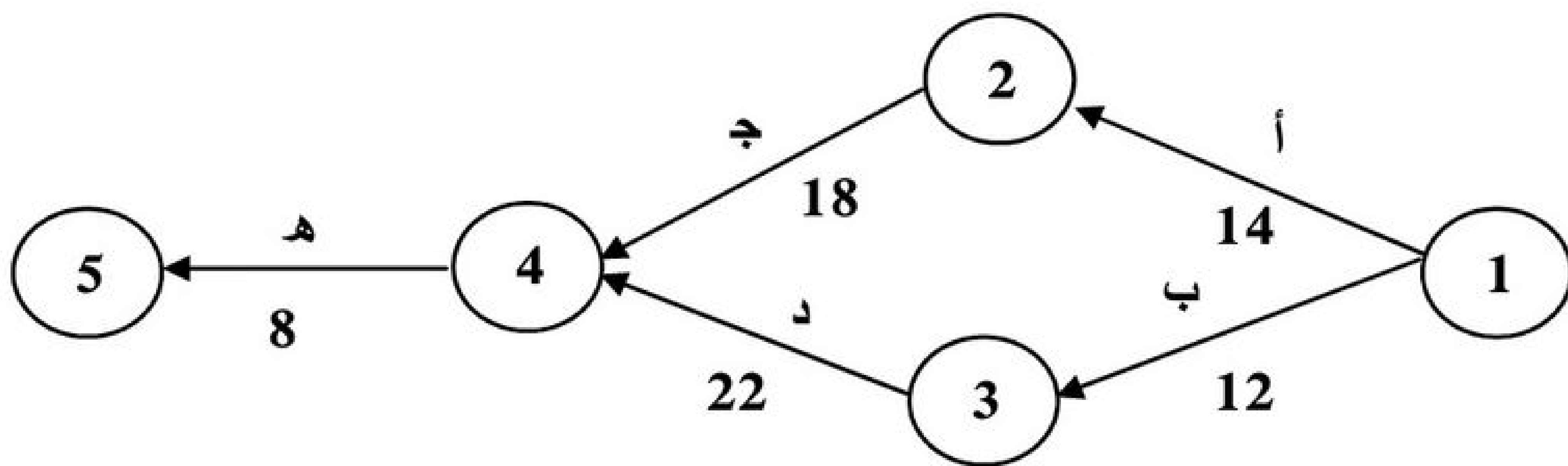
* حساب الفرق بين طول المسار الحرج وطول المسار الآخر على الشبكة:

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ جـ هـ)

= 46 – 40 = 6 أيام.

* وحيث أن حدود فترة التخفيض للنشاط (ب) الذى وقع عليه الاختيار (4 أيام) لأنه صاحب أقل معدل زيادة فى التكلفة المتغيرة (720). وبما أن الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ جـ هـ) (6 أيام)

∴ يتم تخفيض النشاط (ب) بحدود فترة تخفيضة بالكامل وهى (4 أيام) دون الخوف من تحول المسار الحرج. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 46 – 4 = 42 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع** = التكلفة المتسرعة للنشاط (ب) + التكاليف الثابتة

= (4 × 720) + (42 × 2400) = 103680 جنيه.

يتضح من شبكة الأعمال السابقة أن المسار الحرج مازال هو المسار (ب د هـ) ولكن أصبح طوله

= 12 + 22 + 8 = 42 يوم

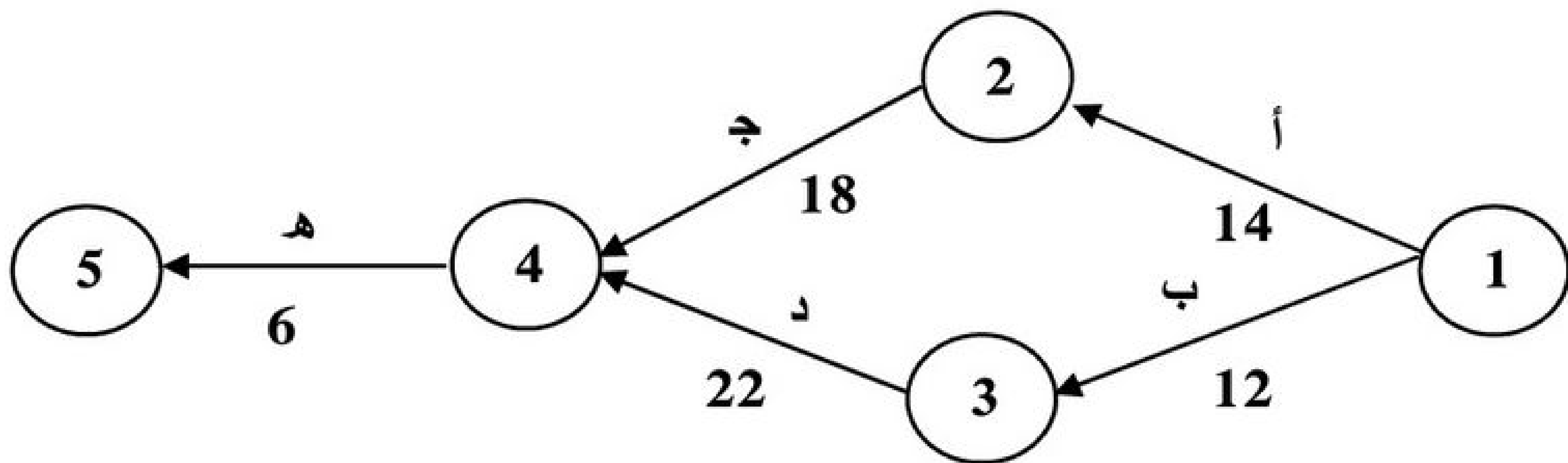
التخفيض الثاني: يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاط (ب) قد استنفذ فترة تخفيضة بالكامل، فإنه يتم اختيار النشاط صاحب أقل معدل زيادة فى التكلفة المتغيرة بعد ذلك وهو النشاط (هـ)

* حدود فترة التخفيض للنشاط (هـ) = 8 – 6 = 2 يوم.

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ جـ هـ)

= 42 − 40 = 2 يوم

إذاً يتم تخفيض النشاط (هـ) بمقدار يومين. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 42 − 2 = 40 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع** = التكلفة المتسرعة للنشاط (هـ) + التكاليف الثابتة

= (2 × 1440) + (2400 × 40) = 98880 جنيه.

يتضح من شبكة الأعمال السابقة أن المسار الحرج مازال هو المسار (ب د هـ) ولكن أصبح طوله

= 12 + 22 + 6 = 40 يوم

التخفيض الثالث: يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاطان (ب)، (هـ) قد استنفذا فترة تخفيضهما بالكامل، فإنه يتم اختيار النشاط صاحب أقل معدل زيادة فى التكلفة المتغيرة بعد ذلك وهو النشاط (د)

* حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 22 − 18 = 4 أيام.

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ جـ هـ)

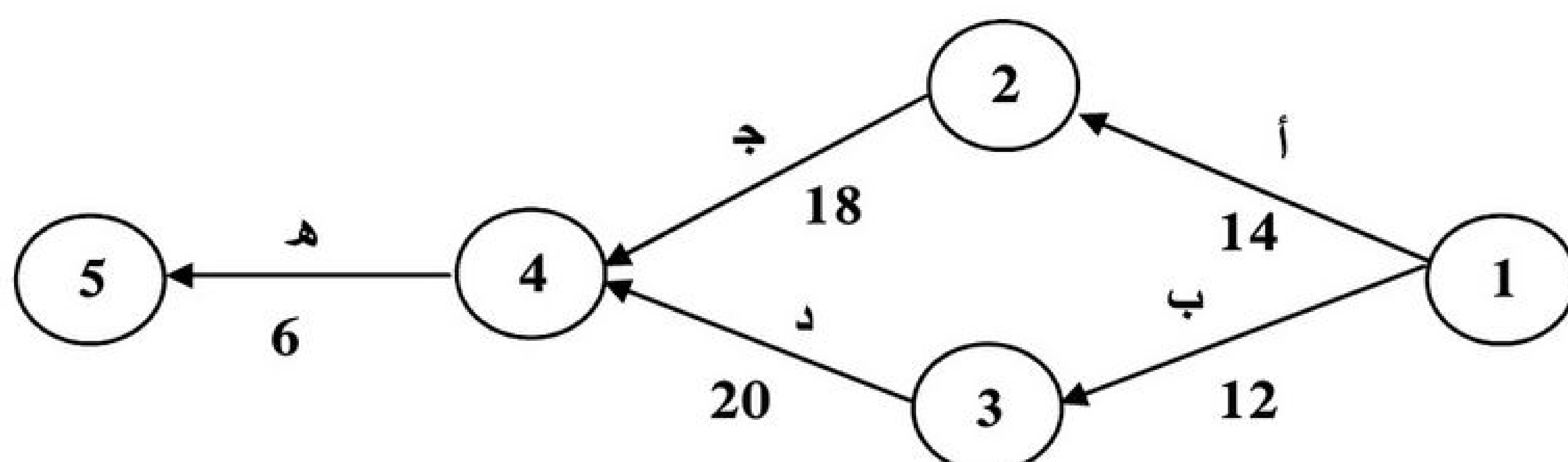
= 40 − 38 = 2 يوم.

نقارن بين حدود فترة التخفيض للنشاط (د) مع الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ جـ هـ) ويتم التخفيض بأقلها كما يلى:

* حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 4 أيام.

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ جـ هـ) = 2 يوم.

إذاً يتم تخفيض النشاط (د) بمقدار يومين. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 40 – 2 = 38 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع** = التكلفة المتسرعة للنشاط (د) + التكاليف الثابتة

= (2 × 1680) + (2400 × 38) = 94560 جنيه.

ويلاحظ من شبكة الأعمال السابقة وجود مساران حرجان هما:

المسار ب د هـ = 12 + 20 + 6 = 38 يوم.

المسار أ جـ هـ = 14 + 18+ 6 = 38 يوم.

التخفيض الرابع: حيث أنه قد ظهر مساران حرجان على الشبكة فلا بد من تخفيضهما معاً كما يلى:

بالنسبة للمسار (ب د هـ) نجد أن النشاط (د) يتبقى من حدود فترة تخفيضه 22 –20 = 2 يوم.

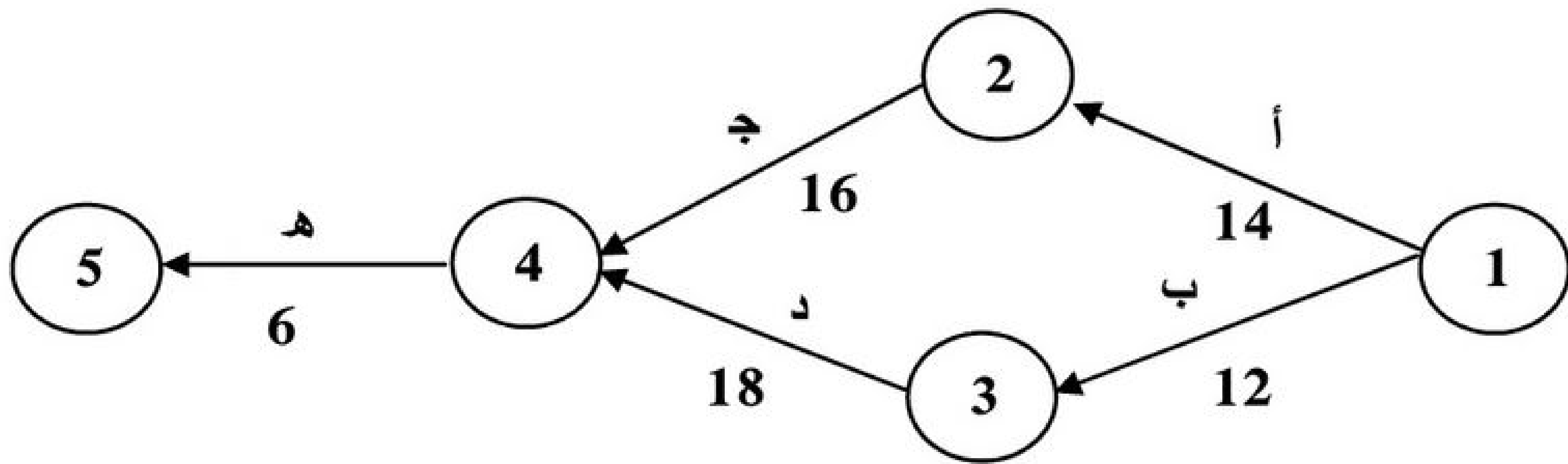
أما بالنسبة للمسار (أ جـ هـ) فنجد أن النشاط (أ) لا يمكن تخفيضه، والنشاط (هـ) قد استنفذ حدود فترة تخفيضه ولم يتبقي علي هذا المسار إلا النشاط (جـ) وحدود فترة التخفيض للنشاط (جـ) = 18– 14 = 4 أيام

نقارن بين المتبقي من حدود فترة التخفيض للنشاط (د) مع حدود فترة التخفيض للنشاط (جـ) ويتم التخفيض بأقلها كما يلى:

* المتبقي من حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 2 يوم.

* حدود فترة التخفيض للنشاط (جـ) = 4 أيام.

∴ يتم تخفيض كل من النشاط (د) والنشاط (جـ) بمقدار (2) يوم. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 38 – 2 = 36 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع =**

التكلفة المتسرعة للنشاط (د)+ التكلفة المتسرعة للنشاط (جـ) + التكاليف الثابتة = (2 × 1680) +(2 × 1200) + (2400 × 36) = 92160 جنيه.

لاحظ أن عملية التخفيض يجب أن تتوقف عند هذا الحد حتى لايتحول المسار الحرج الأصلي (ب د هـ) إلى مسار حرج آخر وهو (أ جـ هـ)، كما أن الأنشطة الواقعة علي المسار الحرج الأصلي (ب د هـ) قد استنفذت حدود فترة تخفيضها.

* **وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلى:**

* النشاط (ب) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام وبتكلفة (4 × 720) = 2880 جنيه

* النشاط (جـ) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وبتكلفة (2 × 1200) = 2400 جنيه.

* النشاط (د) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام وبتكلفة (4 × 1680) = 6720 جنيه.

* النشاط (هـ) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وبتكلفة (2 × 1440) = 2880 جنيه.

وبالتالى تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (46) يوم إلى (36) يوم. وانخفضت تكاليف تنفيذ المشروع من (110400) جنيه إلى (92160) جنيه.

استخدام أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT) فى تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع.

يستخدم أسلوب بيرت فى تخطيط التكاليف وتخصيص الموارد والرقابة عليها، حيث يوضح هذا الأسلوب فترة إتمام المشروع وأدنى تكلفة ممكنة لتنفيذه، إلا أنه يمكن اختصار فترة التنفيذ هذه على حساب زيادة التكلفة ويطلق على التكلفة فى تلك الحالة بالتكلفة المتسرعة.

ويسعى أسلوب بيرت إلى تخفيض فترة إتمام المشروع إلى أدنى حد ممكن مع تحمل أقل قدر من الزيادة فى التكاليف، ويتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

1- رسم شبكة الأعمال وتحديد الوقت والتكلفة لكل نشاط والمسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية. وتعبر فترة المسار الحرج عن أطول فترة لتنفيذ المشروع. ويطلق على الوقت والتكلفة فى هذه الحالة الوقت العادى والتكلفة العادية.

2- يتم البحث عن بدائل مختلفة لتخفيض فترة إتمام المشروع وذلك بفحص الأنشطة المختلفة على أن يتم تحديد وقت وتكلفة النشاط فى حالة الإسراع وفقاً لكل بديل. ويطلق على بدائل الوقت والتكلفة فى هذه الحالة التكلفة المتسرعة والوقت المتسرع.

3- تحديد ميل التكلفة لكل نشاط من أنشطة المشروع، بمعنى ايجاد التكلفة الاضافية الناتجة عن تخفيض (انقاص) زمن النشاط وحدة زمن واحدة عن طريق المعادلة التالية:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة – التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادى – الوقت المتسرع}}$$

4- حيث أن الهدف هو أكبر قدر من التخفيض فى الوقت مع أقل قدر من الزيادة فى تكاليف المشروع، لذلك يجب تخفيض الأنشطة التى تقع على المسار الحرج فقط حيث أن تخفيض وقت تلك الأنشطة هو الذى يؤدى إلى اختصار فترة تنفيذ المشروع، فى حين أن أى تخفيض للأنشطة التى لا تقع على المسار الحرج لن يؤدى إلى اختصار فترة تنفيذ المشروع. وعند تخفيض وقت الأنشطة الواقعة على المسار الحرج يراعى اختيار النشاط صاحب أقل ميل للتكلفة.

ويجب مراعاة المبادئ الأتية عند إجراء عملية التخفيض:

1- أن تخفيض أى نشاط على المسار الحرج يكون فى حدود الوقت المسموح به لتخفيض النشاط، ويعادل الوقت المسموح به لتخفيض النشاط الفرق بين الوقت العادى والوقت المتسرع لتنفيذ النشاط، أى أن حدود فترة التخفيض لكل نشاط = الوقت العادى للنشاط – الوقت المتسرع للنشاط.

فإذا كان الوقت العادى لتنفيذ النشاط (و) هو ثمانية أيام مثلاً والوقت المتسرع لتنفيذ نفس النشاط يعادل خمسة أيام فإن الوقت المسموح به لتخفيض هذا النشاط يساوى ثلاثة أيام، أى أنه لا يمكن تخفيض وقت ذلك النشاط بأكثر من ثلاثة أيام.

2- أن خفض وقت نشاط معين على المسار الحرج بمقدار معين من الزمن لا يعنى انخفاض فترة تنفيذ المشروع بنفس المقدار من الزمن حيث قد يظهر مسار حرج جديد وبالتالى يجب التخلى عن المسار الحرج القديم إلى المسار الحرج الجديد. وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بما يلى:

أ- يتم حساب الفرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة.

ب- تتم مقارنة بين أقل فرق من الفروق المحسوبة وبين حدود فترة التخفيض للنشاط الذى تم اختياره، حيث تتم المقارنة على الوجه التالى:

- إذا كانت حدود فترة تخفيض النشاط ≤ أقل فرق بين طول المسار الحرج والمسارات الأخرى فى هذه الحالة يتم التخفيض فى حدود فترة تخفيض النشاط.
- إذا كانت حدود فترة التخفيض للنشاط > أقل فرق بين طول المسار الحرج والمسارات الأخرى فى هذه الحالة يتم التخفيض بأقل فرق.

3- وهكذا تستمر عملية التخفيض على أنشطة المسار الحرج حتى يتم الحصول إلى الوقت اللازم للتخفيض مع مراعاة الأتى:

أ- فى حالة وجود أكثر من نشاط على المسار الحرج نختار النشاط الأقل ميل تكلفة.

ب- فى حالة ظهور أكثر من مسار حرج على الشبكة نخفضهما معاً بحيث نختار النشاط الذى له أقل ميل تكلفة على كل من المسارين ونحدد حدود فترة التخفيض الخاصة بكل منهما.

أى أنه فى حالة تعدد المسارات الحرجة وظهور أكثر من مسار حرج فى نفس الوقت فإنه من الضرورى تخفيض وقت المسارات الحرجة كلها معاً وفى آن واحد على أن تكون فترة التخفيض هى أدنى وقت مسموح به للأنشطة ذات أقل ميل تكلفة، فمثلاً إذا كان هناك مساران حرجان وكان يمكن تخفيض النشاط صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج الأول بمقدار (3) أيام فى حين أن النشاط صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج الثانى يمكن تخفيضة بمقدار (4) أيام فإنه يتم تخفيض النشاطين صاحباً أقل ميل تكلفة على المسارين الحرجين بمقدار (3) أيام فقط.

وفى بعض الحالات قد يكون هناك نشاط مشترك فى مسارين حرجين (أو أكثر) وبالرغم من أن هذا النشاط المشترك قد لا يكون صاحب أقل ميل للتكلفة إلا أن ميل تكلفته قد يقل عن مجموع ميل التكلفة الخاص بنشاطين كل مهما على مسار حرج مختلف، وفى هذه الحالة يتم تخفيض النشاط المشترك بالرغم من أنه ليس صاحب أقل ميل تكلفة.

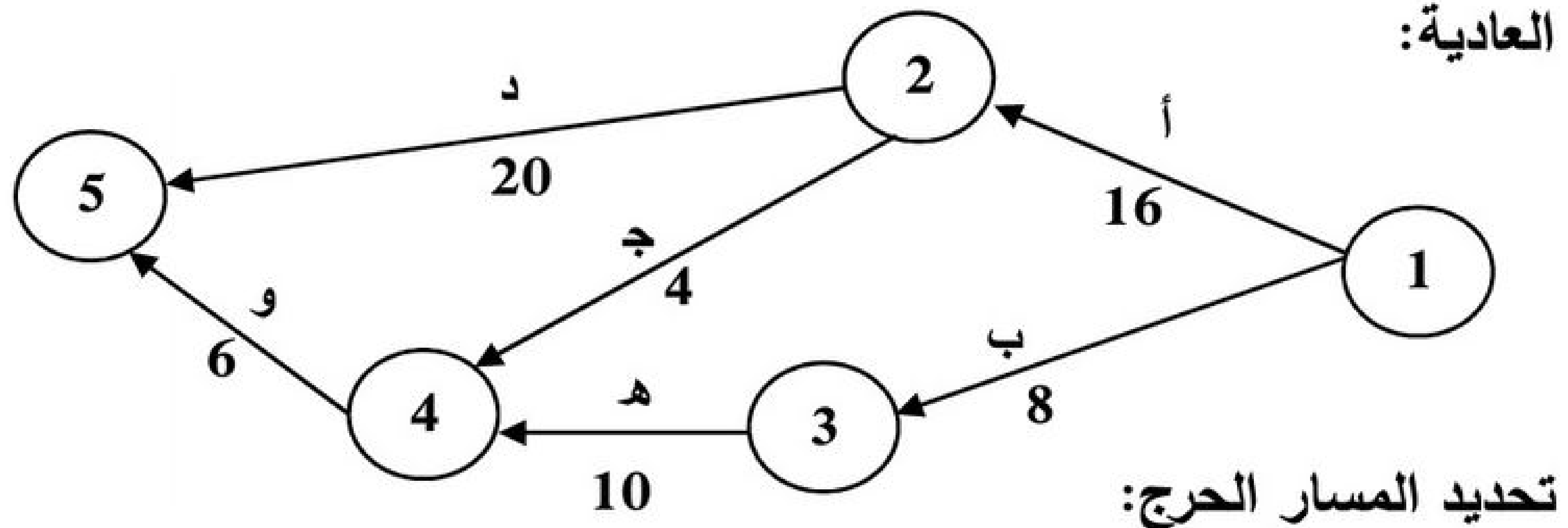
مثال (2): بفرض أنه توافرت لديك البيانات التالية واللازمة لتنفيذ إحدى المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت باليوم		التكاليف بالجنيه	
		العادى	المتسرع	العادية	المتسرعة
أ	1−2	16	12	200	400
ب	1−3	8	4	300	700
جـ	2−4	4	2	100	180
د	2−5	20	10	200	800
هـ	3−4	10	2	200	400
و	4−5	6	2	160	200

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة فى تحديد الحد الأدنى للتكلفة لإتمام المشروع فى (30) يوم.

الحـل

الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية:



تحديد المسار الحرج:

المسار أ د = 16 + 20 = 36 يوم.

المسار أ جـ و = 16 + 4 + 6 = 26 يوم.

المسار ب هـ و = 8 + 10 + 6 = 24 يوم.

∴ المسار الحرج هو (أ د) لأنه أطول مسار على الشبكة.

وبالتالى فإن الوقت اللازم لإتمام المشروع بالكامل = 36 يوم.

*** التكاليف العادية فى هذه الحالة**

= 200 + 300 + 100 + 200 + 200 + 160 = 1160 جنيه.

الخطوة الثانية: تحديد ميل التكلفة وحدود فترة التخفيض لكل نشاط من أنشطة المشروع كما يتضح فى الجدول التالى:

النشاط	ميل التكلفة = (التكلفة المتسرعة – التكلفة العادية) / (الوقت العادى – الوقت المتسرع)	حدود فترة التخفيض للنشاط = الوقت العادى – الوقت المتسرع (باليوم)
أ	(400 – 200) ÷ (16 – 12) = 50	16 – 12 = 4
ب	(700 – 300) ÷ (8 – 4) = 100	8 – 4 = 4
جـ	(180 – 100) ÷ (4 – 2) = 40	4 – 2 = 2
د	(800 – 200) ÷ (20 – 10) = 60	20 – 10 = 10
هـ	(400 – 200) ÷ (10 – 2) = 25	10 – 2 = 8
و	(200 – 160) ÷ (6 – 2) = 10	6 – 2 = 4

الخطوة الثالثة: إجراء عملية التخفيض الممكنة:

حيث أن الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ = 30 يوم فقط، بينما الوقت العادى لتنفيذ المشروع طبقاً للتقديرات العادية = 36 يوم. لذا يجب العمل على تخفيض الوقت العادى بما يمكننا من تنفيذ المشروع خلال الفترة المتعاقد عليها وهى (30) يوم.

التخفيض الأول: نركز على أنشطة المسار الحرج وهو (أ د) حيث نجد أن:

ميل التكلفة للنشاط (أ) = 50 ← يتم اختياره

ميل التكلفة للنشاط (د) = 60

∴ يتم اختيار النشاط (أ) لتخفيض وقته وحدود فترة التخفيض للنشاط (أ) = 16 – 12 = 4 أيام

وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بالآتى:

(1) يتم حساب الفرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة:

* الفرق بين طول المسار الحرج (أد) وطول المسار (أ جـ و)

= 36 – 26 = 10 أيام.

* الفرق بين طول المسار الحرج (أد) وطول المسار (ب هـ و)

= 36– 24 = 12 يوم.

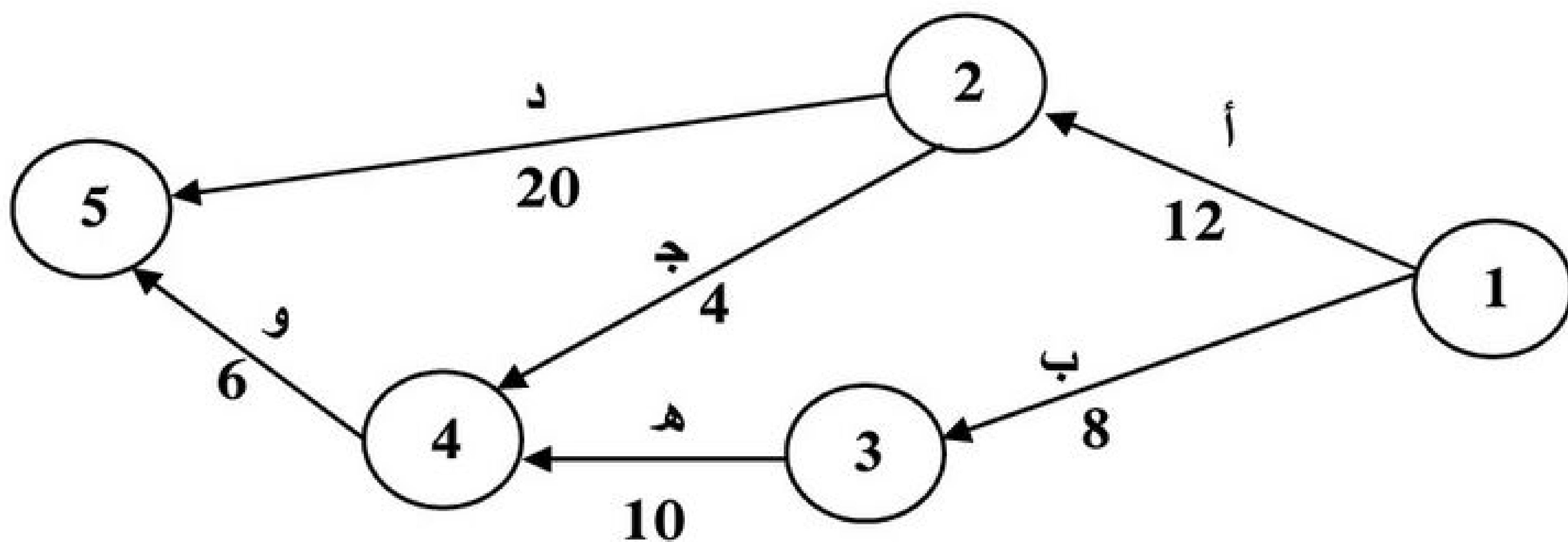
(2) تتم المقارنة بين أقل فرق من الفروق المحسوبة وبين حدود فترة التخفيض للنشاط (أ) حيث نجد أن:

* حدود فترة التخفيض للنشاط (أ) = 4 أيام.

* أقل فرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى = 10 أيام.

∴ يتم تخفيض النشاط (أ) بحدود فترة تخفيضه بالكامل وهى (4 أيام) دون الخوف من تحول المسار الحرج.

وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع = 36 – 4 = 32 يوم.**

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 1160 + (5 × 50) = 1360 جنيه

يتضح من شبكة الأعمال السابقة بأن الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ (30 يوم) فى حين أن الوقت اللازم للتنفيذ مازال أكبر من الوقت المتعاقد عليه بمقدار (2) يوم الأمر الذى يتطلب متابعة عملية التخفيض.

التخفيض الثاني: يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاط (أ) قد استنفذ فترة تخفيضه بالكامل، لذلك لا يوجد أمامنا إلا النشاط (د) وحدود فترة التخفيض للنشاط (د) = (20 – 10) = 10 أيام.

* وحتى نضمن عدم تحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بحساب الفرق بين طول المسار الحرج الجديد (بعد تخفيض النشاط (أ) بمقدار (4) أيام) وطول المسارات الأخرى على الشبكة

– الفرق بين المسار الحرج (أ د) وطول المسار (أ جـ و)

= 32 – 22 = 10 أيام.

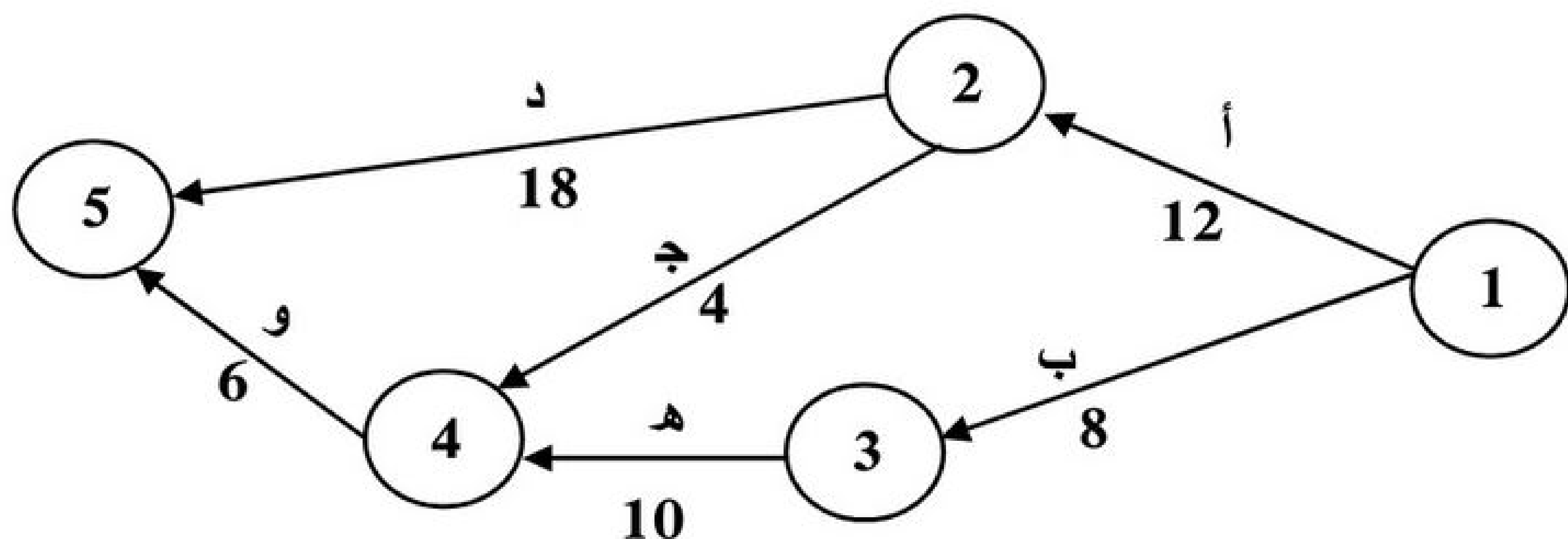
– الفرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسار (ب هـ و)

= 32 – 24 = 8 أيام.

وبما أن الوقت المطلوب تخفيضة هو يومان فقط وهى أقل من أقل فرق

∴ سينخفض النشاط (د) بمقدار (2) يوم فقط.

وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 32 – 2 = 30 يوم.

وبالتالي فإن الوقت اللازم لتنفيذ المشروع = الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ= 30 يوم.

*** تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 1360 + (2 × 60) = 1480 جنيه

*** وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلى:**

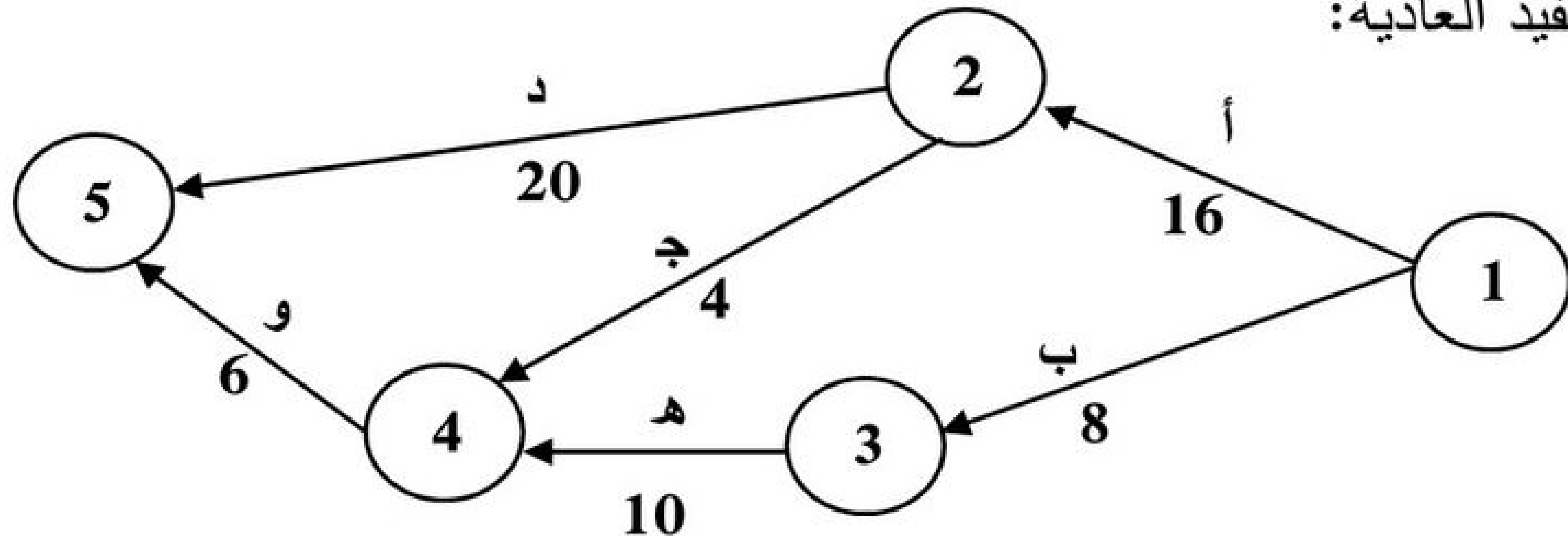
النشاط (أ) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام وبتكلفة (4 × 50)= 200 جنيه.

النشاط (د) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وبتكلفة (2 × 60) = 120 جنيه.

وبالتالى تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (36) يوم إلى (30) يوم. وزادت تكاليف تنفيذ المشروع من (1160) جنيه إلى (1480) جنيه.

مثال (3): فى المثال السابق (رقم 2) استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذى يمكن الوصول إليه.

الحل: الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية:



* المسار الحرج هو (أ د) وطوله = 36 يوم.

*** التكاليف العادية فى الحالة**

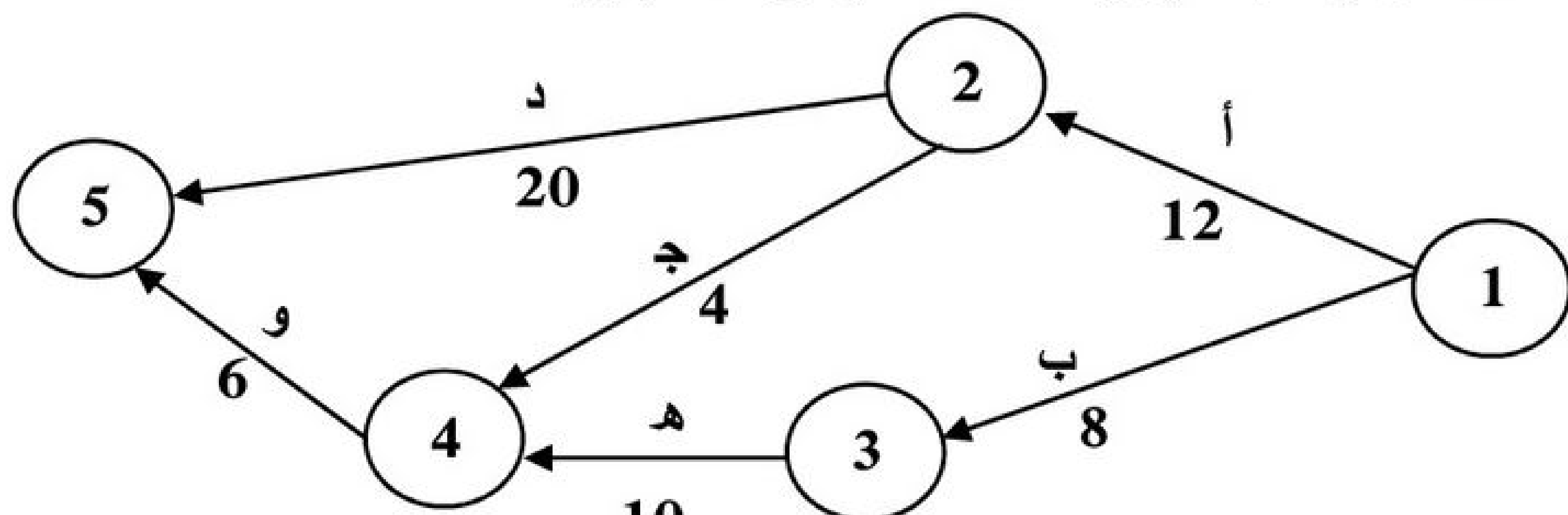
= 200 + 300 + 100 + 200 + 200 + 160 = 1160 جنيه.

الخطوة الثانية: بما أننا نريد تخفيض الوقت اللازم لتنفيذ المشروع إلى أدنى حد ممكن، فإننا سنركز على أنشطة المسار الحرج (أ د):

التخفيض الأول: نختار النشاط (أ) لأنه النشاط صاحب أقل ميل للتكلفة (50) فى حين أن النشاط (د) ميل تكلفته (60).

وحيث أن حدود فترة تخفيض النشاط (أ) = 16 – 12 = 4 أيام

وهى أقل من أقل فرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسارات الأخرى (أجـ و) (ب هـ و) على الشبكة (10 ، 12) يوم على الترتيب. إذاً نخفض النشاط (أ) فى حدود فترة تخفيضه بالكامل وهى (4) أيام. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 36 – 4 = 32 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 1160 + (4 × 50) = 1360 جنيه

ومن شبكة الأعمال السابقة يتضح أن طول المسار الحرج (أ د) = 32 يوم.

التخفيض الثاني: حيث أن النشاط (أ) قد استنفذ حدود فترة تخفيضه بالكامل ولم يتبقى فى المسار الحرج (أ د) سوى النشاط (د) لذلك نحاول تخفيض النشاط (د) كما يلى:

* حدود فترة تخفيض النشاط (د) = 20 – 10 = 10 أيام.

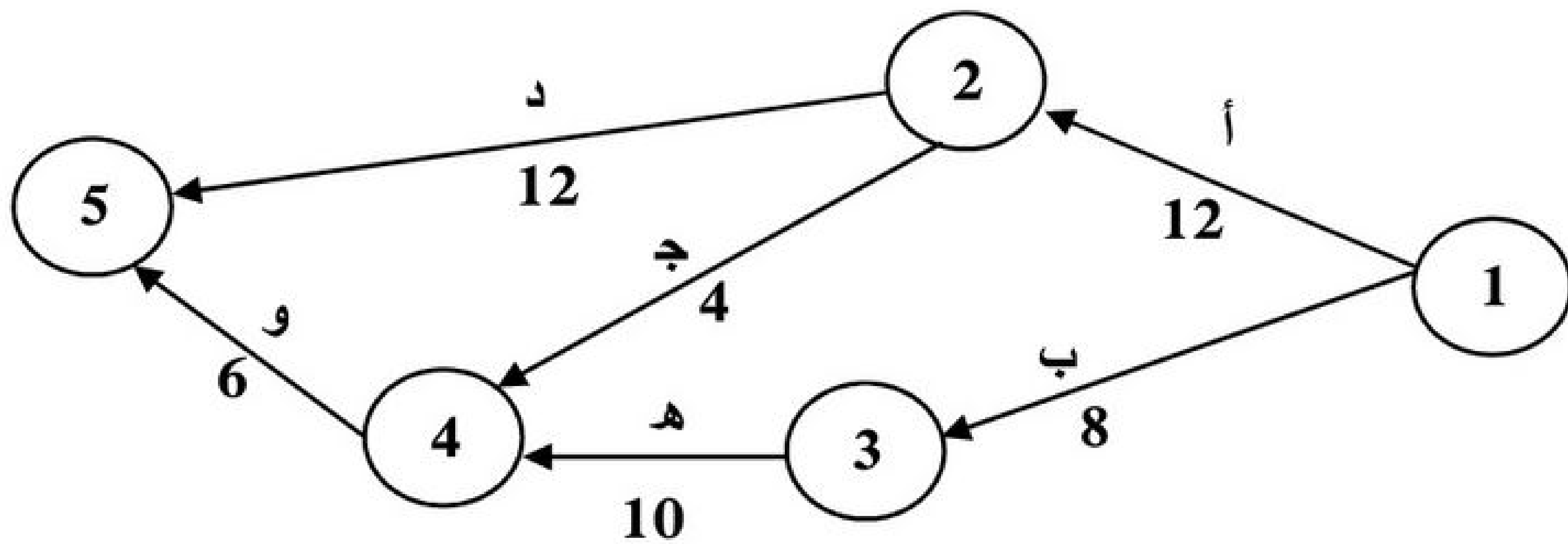
* الفرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسار (أ جـ و)

= 32 – 22 = 10 أيام.

* الفرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسار (ب هـ و)

= 32 – 24 = 8 أيام.

وحيث أن حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 10 أيام وهى أكبر من أقل فرق بين طول المسار الحرج (أ د) وأطوال المسارات الأخرى المبينة فى شبكة الأعمال السابقة. لذلك سينخفض النشاط (د) بأقل فرق وهو (8) أيام لتصبح شبكة الأعمال الجديدة بعد تخفيض النشاط (د) بمقدار (8) أيام كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 32 – 8 = 24 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 1360 + (8 × 60) = 1840 جنيه.

يلاحظ من شبكة الأعمال السابقة أنه هناك مساران حرجان وهما (أ د)، (ب هـ و) ويبلغ طول كل منهما (24).

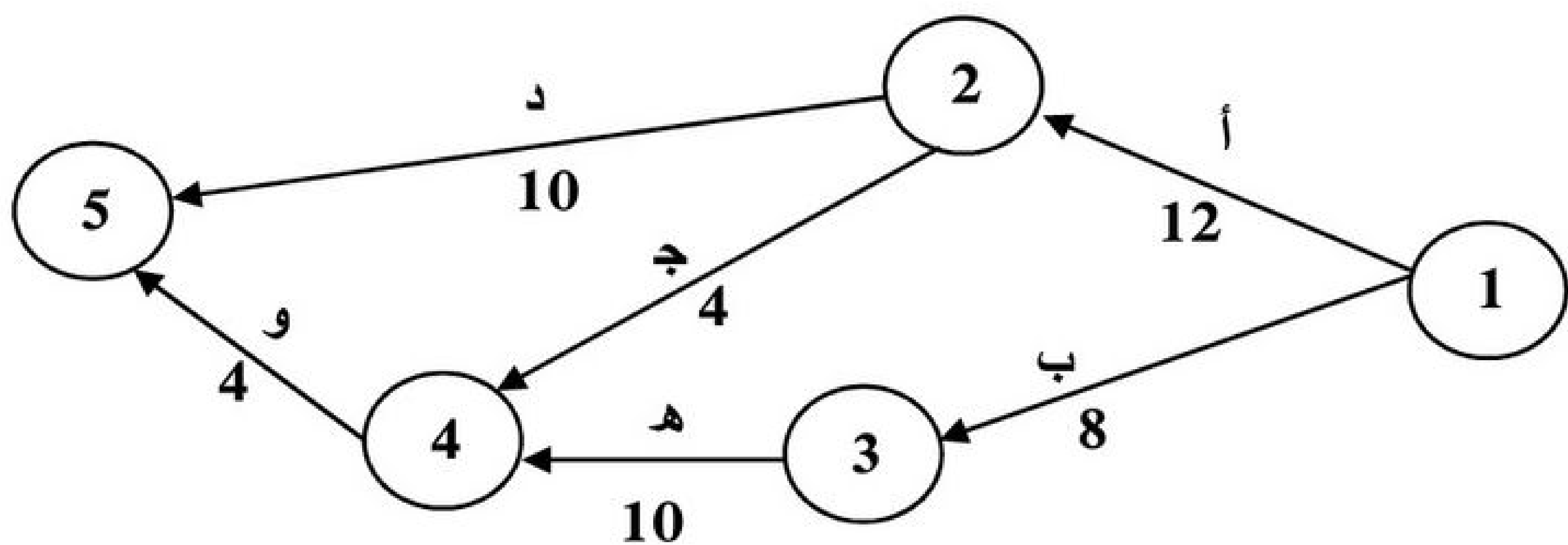
التخفيض الثالث: حيث أنه قد ظهر مساران حرجان فلابد من تخفيضهما معاً كما يلى:

– نختار النشاط الذى له أقل ميل تكلفة على المسار (ب هـ و) فنجده النشاط (و) وحدود فترة تخفيضه (4) أيام.

- يتبقى النشاط (د) على المسار الحرج (أ د) ويمكن تخفيضه بمقدار يومين فقط (وهى الفترة الباقية من حدود فترة تخفيضه 10 أيام، حيث تم تخفيضه قبل ذلك بمقدار 8 أيام).
- نقارن حدود فترة تخفيض النشاط (د) مع حدود فترة تخفيض النشاط (و) مع أقل فرق بين طول المسار الحرج (أ د) وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة ويتم التخفيض بأقلها كما يلى:

* المتبقي من حدود فترة تخفيض النشاط (د) = 2 يوم.
* حدود فترة تخفيض النشاط (و) = 4 أيام.
* أقل فرق بين طول المسار الحرج سواء (أ د) أو (ب هـ و) وطول المسار (أ جـ و) = 24 – 22 = 2 يوم.

إذاً سيتم تخفيض كلا النشاطين (د)، (و) بمقدار (2) يوم لكل منهما. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 24 – 2 = 22 يوم.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 1840 + (2 × 60) + (2 × 10) = 1980 جنيه.

يظهر من شبكة الأعمال السابقة أن حدود فترة التخفيض لجميع الأنشطة الواقعة على المسار الحرج (أ د) قد استنفذت بالكامل، وهذا معناه انه لا يمكن

إجراء أى تخفيض أخر على هذا المسار، لذلك، تتوقف عملية التخفيض حتى ولو كان ذلك ممكناً على غيره من المسارات لأنه لو أجرى تخفيض على أى مسار آخر فإن المشروع سيتحمل تكاليف اضافية دون تأثير ذلك تخفيض الوقت الكلى اللازم لتنفيذ المشروع.

*** وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلى:**

النشاط (أ) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام وبتكلفة (4 × 50)= 200 جنيه.

النشاط (د) تم تخفيضه بمقدار (10) يوم وبتكلفة (10 × 60) = 600 جنيه.

النشاط (و) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وبتكلفة (2 × 10) = 20 جنيه.

وبالتالى تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (36) يوم إلى (22) يوم. وزادت تكاليف تنفيذ المشروع من (1160) جنيه إلى (1980) جنيه.

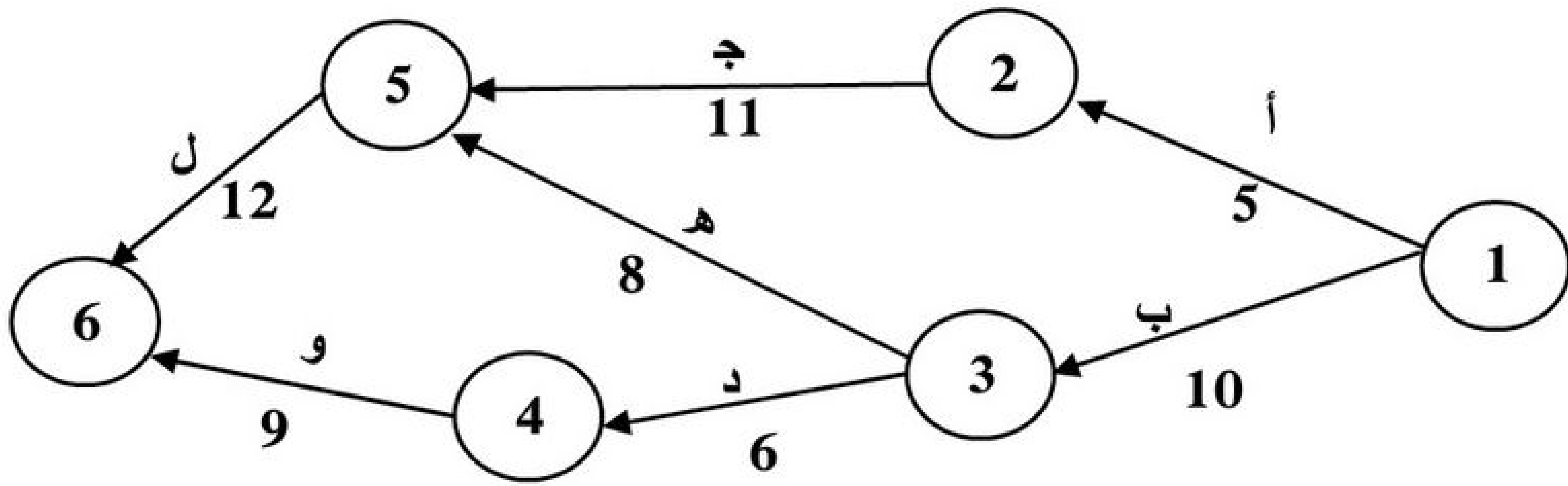
مثال (4): إذا توفرت لديك البيانات التالية واللازمة لتنفيذ إحدى المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت بالأسبوع		التكاليف بالجنيه	
		العادى	المتسرع	العادية	المتسرعة
أ	2-1	5	3	4000	5600
ب	3-1	10	7	7200	9600
جـ	5-2	11	8	6000	7200
د	4-3	6	5	2000	2600
هـ	5-3	8	4	1200	2800
و	6-4	9	8	4800	6000
ل	6-5	12	8	2400	3600

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة فى تحديد الحد الأدنى للتكلفة لإتمام المشروع فى 23 أسبوع.

الحــل

الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية:



تحديد المسار الحرج:

المسار أ جـ ل = 5 + 11 + 12 = 28 أسبوع.

المسار ب هـ ل = 10 + 8 + 12 = 30 أسبوع.

المسار ب د و = 10 + 6 + 9 = 25 أسبوع.

∴ المسار الحرج هو (ب هـ ل) وزمنه = 30 أسبوع.

الوقت اللازم لإتمام المشروع بالكامل = 30 أسبوع وهو نفس طول المسار الحرج. وحدود فترة التخفيض الممكنة = 30 – 23 = 7 أسابيع

*** التكاليف العادية فى هذه الحالة**

= 4000 + 7200 + 6000 + 2000 + 1200 + 4800 + 2400 = 27600 جنيه

الخطوة الثانية: تحديد ميل التكلفة وحدود فترة التخفيض لكل نشاط من أنشطة المشروع كما يتضح من الجدول التالى:

النشاط	ميل التكلفة = (التكلفة المتسرعة – التكلفة العادية) / (الوقت العادى – الوقت المتسرع)	حدود فترة التخفيض للنشاط = الوقت العادى – الوقت المتسرع (أسبوع)
أ	800 = (3 – 5) ÷ (4000 – 5600)	2 = 3 – 5
ب	800 = (7 – 10) ÷ (7200 – 9600)	3 = 7 – 10
جـ	400 = (8 – 11) ÷ (6000 – 7200)	3 = 8 – 11
د	600 = (5 – 6) ÷ (2000 – 2600)	1 = 5 – 6
هـ	400 = (4 – 8) ÷ (1200 – 2800)	4 = 4 – 8
و	1200 = (8 – 9) ÷ (4800 – 6000)	1 = 8 – 9
ل	300 = (8–12) ÷ (2400 – 3600)	4 = 8 – 12

الخطوة الثالثة: إجراء عملية التخفيض الممكنة:

حيث أن الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ = 23 أسبوع فقط، بينما الوقت العادى لتنفيذ المشروع طبقاً للتقديرات العادية = 30 أسبوع لذا يجب العمل على تخفيض الوقت العادى بما يمكننا من تنفيذ المشروع خلال الفترة المتعاقد عليها وهى (23) أسبوع.

التخفيض الأول: نركز على أنشطة المسار الحرج وهى (ب هـ ل) حيث نجد أن:

ميل التكلفة للنشاط (ب) = 800

ميل التكلفة للنشاط (هـ) = 400

ميل التكلفة للنشاط (ل) = 300

يتم اختيار النشاط (ل) صاحب أقل ميل تكلفة، وحدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = (4) أسابيع.

وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بالأتى:

* حساب الفرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة:

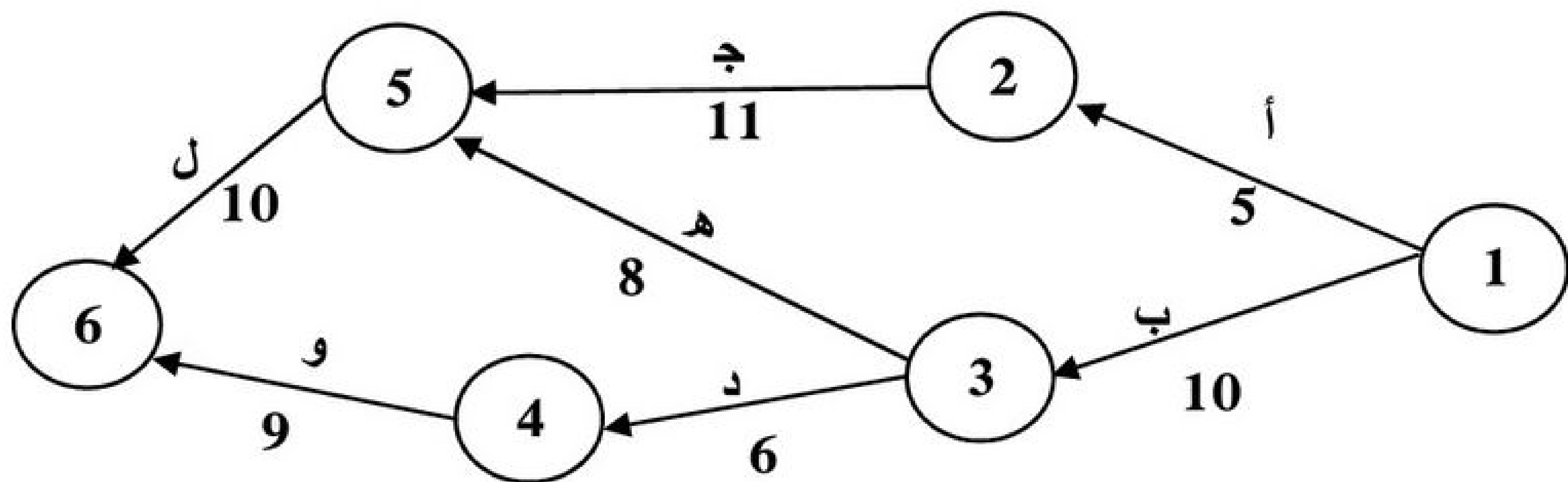
* الفرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وطول المسار (أ جـ ل)

= 30 – 28 = 2 أسبوع.

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وطول المسار (ب د و)

= 30 – 25 = 5 أسابيع.

وحيث أن حدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = 4 أسابيع وهى أكبر من أقل فرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى، ففى هذه الحالة يتم تخفيض النشاط (ل) بأقل فرق وهو (2) أسبوع. وتصبح شبكة الأعمال الجديدة كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 30 – 2 = 28 أسبوع.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 27600 + (2 × 300) = 28200 جنيه.

مازال المسار الحرج هو (ب هـ ل) ولكن أصبح طوله =

10 + 8 + 10 = 28 أسبوع.

التخفيض الثانى: مازال النشاط (ل) واقعاً على المسار الحرج، كما أنه مازال صاحب أقل ميل تكلفة. ثم مازال أيضاً وقت تنفيذه يسمح بتخفيضه (حيث يتبقى أسبوعان من حدود فترة تخفيض النشاط (ل).

* المتبقى من حدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = 2 أسبوع.

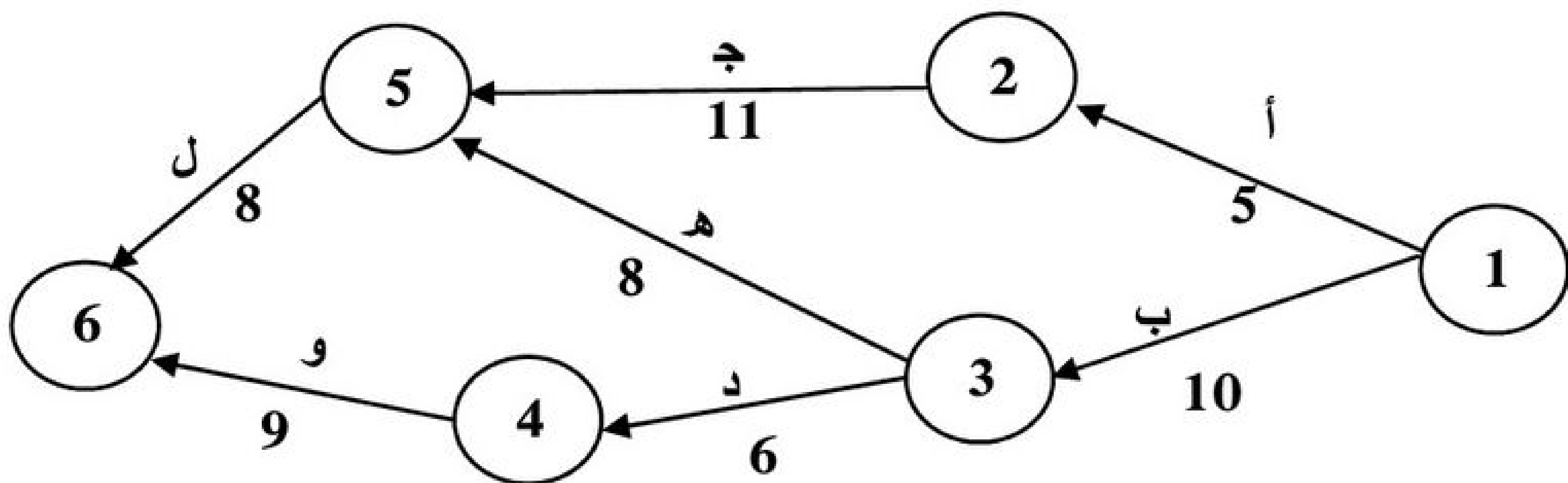
* الفرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وطول المسار (أ جـ ل)

= 28 – 26 = 2 أسبوع.

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وطول المسار (ب د و)

= 28 – 25 = 3 أسابيع.

∴ أقل فرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة = 2 أسبوع. وحيث أن المتبقى من حدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = 2 أسبوع، إذا يتم تخفيض النشاط (ل) بمقدار(2) أسبوع. وتصبح شبكة الأعمال الجديدة بعد هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 28 – 2 = 26 أسبوع.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 28200 + (2 × 300) = 28800 جنيه

ما زال المسار الحرج هو (ب هـ ل) ولكن أصبح طوله

= 10 + 8 + 8 = 26 أسبوع.

التخفيض الثالث: يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاط (ل) قد استنفذ فترة تخفيضه بالكامل، لذلك يتم اختيار النشاط صاحب أقل ميل تكلفة بعد ذلك وهو النشاط (هـ)

* حدود فترة التخفيض للنشاط (هـ) = 8 – 4 = 4 أسابيع.

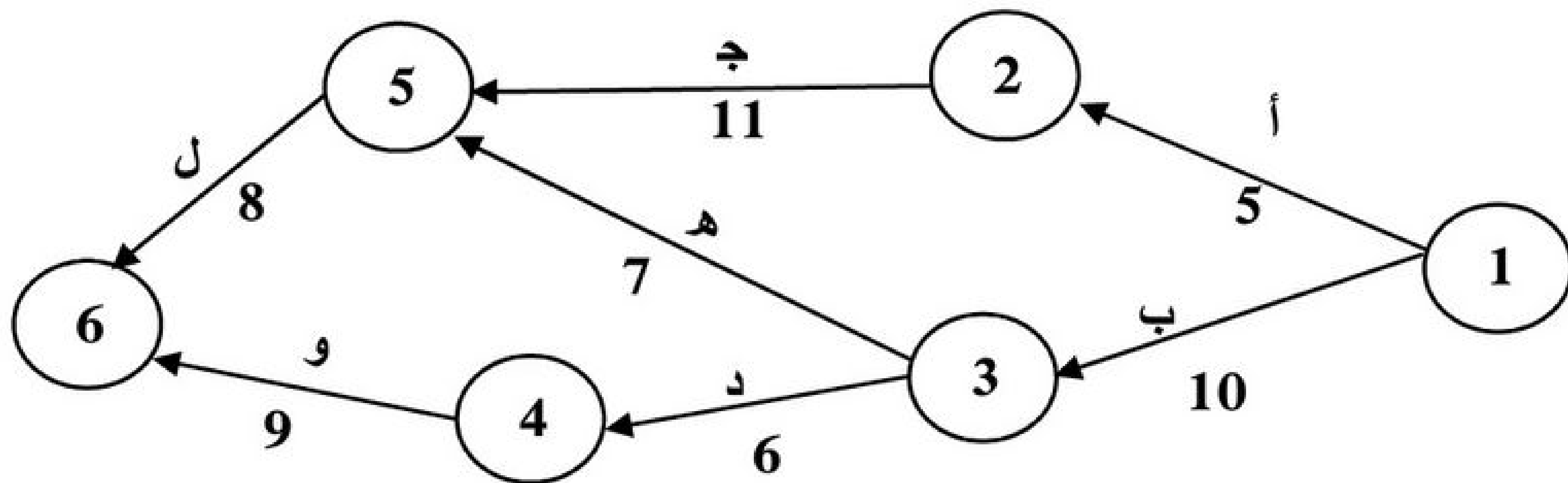
* الفرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وطول المسار (أ جـ ل)

= 26 – 24 = 2 أسبوع.

* الفرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وطول المسار (ب د و)

= 26 – 25= (1) أسبوع

∴ أقل فرق بين طول المسار الحرج (ب هـ ل) وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة = واحد أسبوع. إذاً يتم تخفيض النشاط (هـ) بمقدار (1) أسبوع. وتصبح شبكة الأعمال الجديدة بعد هذا التخفيض كما يلي:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 26 – 1 = 25 أسبوع.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 28800 + (1 × 400) = 29200 جنيه

ويلاحظ من شبكة الأعمال السابقة أن هناك مساران حرجان وهما:

المسار (ب هـ ل) = 10 + 7 + 8 = 25 أسبوع.

المسار (ب د و) = 10 + 6 + 9 = 25 أسبوع.

التخفيض الرابع: حيث أنه قد ظهر مسارات حرجان فلابد من تخفيضهما معاً كما يلي:

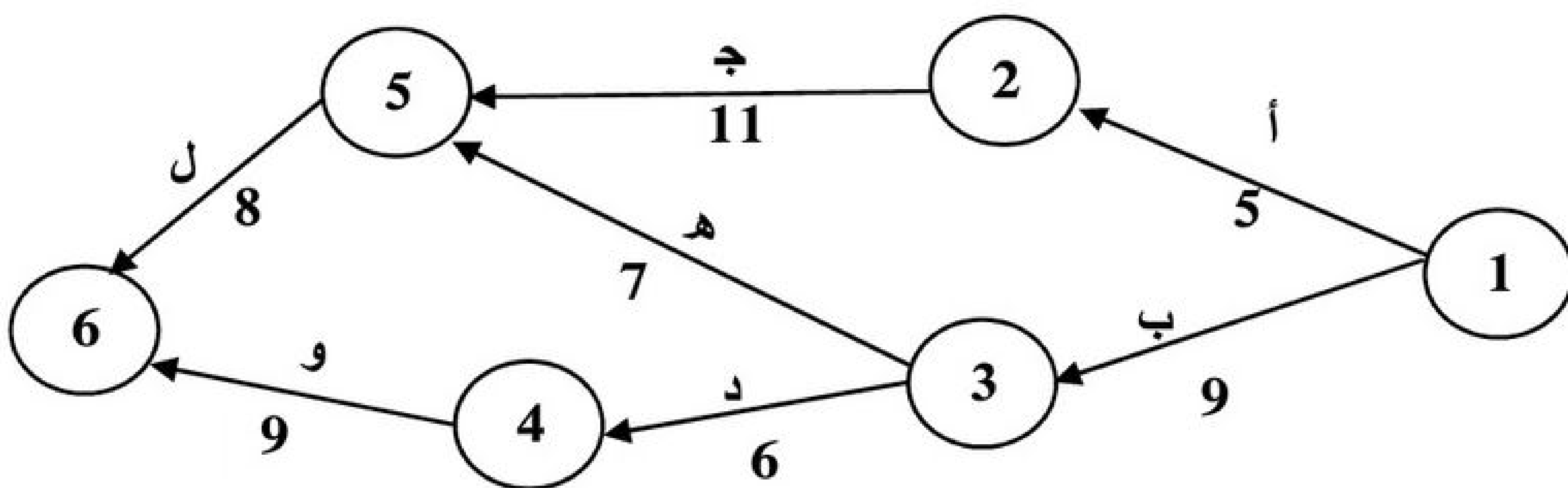
يعتبر النشاط (ب) نشاطاً مشتركاً بين المسارين (ب هـ ل) و (ب د و) ، لذلك يتم اختياره للتخفيض برغم ارتفاع ميل تكلفته حيث بلغت (800) جنيه، ويلاحظ أنهذه التكلفة بالرغم من ارتفاعها إلا أنها تعد أقل من مجموع ميل

تكلفة نشاطين مختلفين يقع كل منهما على مسار حرج واحد وبناء على ذلك يتم تخفيض وقت النشاط (ب) كما يلى:

* حدود فترة التخفيض للنشاط (ب) = 10 – 7 = 3 أسبوع.

* الفرق بين طول المسار الحرج سواء (ب هـ ل) أو (ب د و) مع طول المسار (أ جـ ل) = 25 – 24 = (1) أسبوع.

∴ يتم تخفيض النشاط (ب) بمقدار (1) أسبوع. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ **الوقت اللازم لإتمام المشروع** = 25 – 1 = 24 أسبوع.

* **تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 29200 + (1 × 800) = 30000 جنيه

ويظهر من شبكة الأعمال السابقة وجود ثلاثة مسارات حرجة كما يلى:

المسار (ب هـ ل) = 9 + 7 + 8 = 24 أسبوع.

المسار (أ جـ ل) = 5 + 11 + 8 = 24 أسبوع.

المسار (ب د و) = 9 + 6 + 9 = 24 أسبوع.

التخفيض الخامس:

* يتم اختيار النشاط (ب) لتخفيضه مرة أخرى (لاحظ أن المتبقى من حدود فترة تخفيض النشاط (ب) = 2 أسبوع) باعتباره نشاطاً مشتركاً بين المسار (ب هـ ل) والمسار (ب د و).

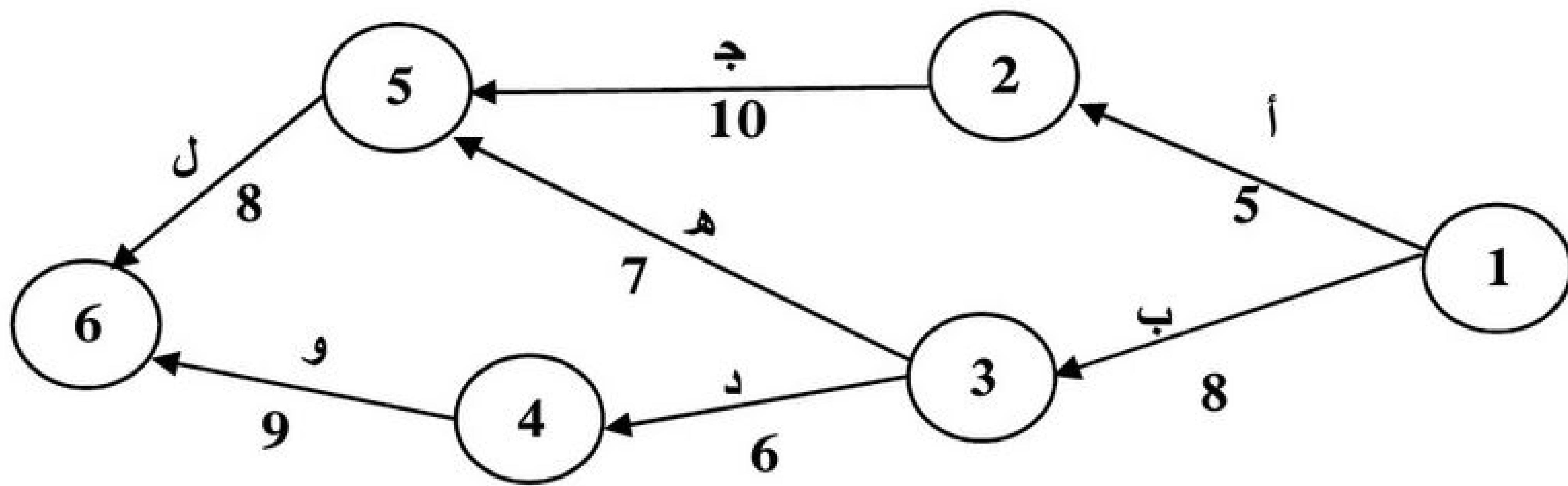
* أما فيما يتعلق بالمسار (أ جـ ل) فيتم اختيار النشاط (جـ) وذلك لأنه صاحب أقل ميل تكلفة فى هذا المسار بعد النشاط (ل) والذى استنفذ حدود فترة تخفيضه بالكامل.

* حدود فترة التخفيض للنشاط (جـ) = 11 – 8 = 3 أسبوع.

* المتبقى من حدود فترة تخفيض النشاط (ب) = 2 أسبوع.

* الوقت المتعاقد عليه لتنفيذ المشروع = 23 أسبوع.

∴ يتم تخفيض كل من النشاط (ب) والنشاط (جـ) بمقدار(1) أسبوع، حتى يصل الوقت اللازم لتنفيذ المشروع إلى الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ وهو (23) أسبوع. وبالتالى تظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلى:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 24 – 1 = 23 أسبوع.

*** تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض**

= 30000 + (1 × 800) + (1 × 400) = 31200 جنيه

*** وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلى:**

النشاط (ل) تم تخفيضه بمقدار (4) أسبوع وبتكلفة (4 × 300) = 1200 جنيه.

النشاط (ب) تم تخفيضه بمقدار (2) أسبوع وبتكلفة (2 × 800)

= 1600 جنيه.

النشاط (هـ) تم تخفيضه بمقدار (1) أسبوع وبتكلفة (1 × 400)

= 400 جنيه.

النشاط (جـ) تم تخفيضه بمقدار (1) أسبوع وبتكلفة (1 × 400)

= 400 جنيه.

وبالتالى تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (30) أسبوع إلى (23) أسبوع.

وزادت تكاليف تنفيذ المشروع من (27600) جنيه إلى (31200) جنيه.

تمارين علي الفصل التاسع

تمرين (1): إذا توافرت لديك المعلومات التالية عن الأنشطة الضرورية اللازمة للإنتهاء من أحد المشروعات الإنتاجية:

النشاط	مسار النشاط	الوقت باليوم		معدل الزيادة فى التكاليف المتغيرة يومياً بالجنيه
		العادى	المتسرع	
أ	1−2	7	2	10
ب	1−3	7	2	10
جـ	1−4	8	3	4
د	2−5	1	1	15
هـ	3−5	5	1	12
و	4−6	8	6	8
ى	5−6	5	2	15

فإذا علمت أن التكاليف الثابتة لهذا المشروع = 20 جنيه / يومياً.

المطلوب: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج، ثم تخفيض الفترة اللازمة لإنهاء أعمال المشروع إلى الحد الأقصى الذى يمكن الوصول إليه.

تمرين (2): يبين الجدول التالى التكلفة العادية والتكلفة المتسرعة والوقت العادى والوقت المتسرع للأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت بالأسبوع		التكاليف بالجنيه	
		العادى	المتسرع	العادية	المتسرعة
أ	1−2	10	8	100	120
ب	2−3	7	5	63	80
جـ	2−4	6	3	42	60
د	3−5	8	5	56	71
هـ	4−5	5	3	30	38

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة فى تحديد الحد الأدنى للتكلفة لإتمام المشروع فى 19 أسبوع.

تمرين (3): يبين الجدول التالى التكلفة العادية والتكلفة المتسرعة والوقت العادى والوقت المتسرع للأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت بالأسبوع		التكاليف بالجنيه	
		العادى	المتسرع	العادية	المتسرعة
أ	2-1	3	2	800	1400
ب	3-1	2	1	1200	1900
جـ	4-2	5	3	2000	2800
د	4-3	5	3	1500	2300
هـ	6-4	6	4	1800	2800
و	5-4	2	1	600	1000
ى	6-5	2	1	500	1000

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذى يمكن الوصول إليه.

تمرين (4): فيما يلى البيانات الخاصة بوقت وتكلفة إنجاز الأنشطة اللازمة لأحد المشروعات:

النشاط	النشاط السابق	الوقت باليوم		التكلفة بالجنيه	
		العادى	المتسرع	العادية	المتسرعة
أ	-	2	1	6	10
ب	أ	5	2	9	18
جـ	أ	4	3	6	8
د	ب ، جـ	3	1	5	9

المطلوب:

1- تحديد أقل وقت يلزم لإتمام المشروع وتكلفة التنفيذ العادية للمشروع.

2- بفرض أن هناك ميزانية إضافية للمشروع قدرها (11) جنيه. ضع خطة لتوزيع هذه الميزانية بين الأنشطة حتى نصل إلى أقل وقت إتمام للمشروع بأقل تكلفة ممكنة.

تمرين (5): إذا توافرت لديك البيانات التالية عن أحد المشروعات الواجب تنفيذها:

النشاط	النشاط السابق	التكلفة بالجنيه		الوقت باليوم	
		العادية	المتسرعة	العادى	المتسرع
أ	-	500	800	7	4
ب	أ	200	350	3	2
جـ	-	500	900	6	4
د	جـ	200	500	3	1
هـ	ب ، جـ	300	550	2	1

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذى يمكن الوصول إليه.

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية:

- البكري، سونيا محمد، (2003)، **" استخدام الأساليب الكمية في الإدارة"**، قسم إدارة الأعمال ،كلية التجارة– جامعة الإسكندرية.

- البكري، سونيا محمد، (2004) ،**"تخطيط و مراقبة الإنتاج"**، قسم إدارة الأعمال ،كلية التجارة– جامعة الإسكندرية.

- السيد، إسماعيل (1998) **" استخدام الأساليب الكمية في الإدارة "** الإسكندرية، الدار الجامعية.

- السيد، إسماعيل (2001) **""الأساليب الكمية في مجال الأعمال"** الإسكندرية، الدار الجامعية.

- العبد، جلال إبراهيم (2004) **" استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية"** الإسكندرية، الدار الجامعية الجديدة للنشر.

- الموسوي، منعم زمزير (2010 م /1431 ه) **" الأساليب الكمية في الإدارة "** عمان، دار زهران للنشروالتوزيع.

- زيدان، محمد أبو العلا محمد ، (بدون سنة نشر)، **" الأساليب الكمية في الإدارة(بحوث العمليات) "**، قسم إدارة الأعمال ،كلية التجارة– جامعة حلوان.

- سلطان، أشرف فؤاد، (2017)، **"إدارة الإنتاج والعمليات :المدخل الكمي المعاصر)"**، الإسكندرية دار فاروس العلمية للنشر.

- عبد العليم، نجاتي إبراهيم ، (بدون سنة نشر)، " **بحوث العمليات في المحاسبة"**، مركز جامعة بني سويف للطباعة والنشر.
- غنيم، أحمد محمد ، (2010)، " **الأساليب الكمية: المفاهيم العلمية والتطبيقات الإدارية** "، المنصورة، المكتبة العصرية للنشر والتوزيع.
- ماضي، محمد توفيق، (1995)، " **الأساليب الكمية في مجال الإدارة** "، قسم إدارة الأعمال ،كلية التجارة– جامعة الإسكندرية.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

– Anderson, D. R., Sweeney,D,J.,Williams,T.A.,and Martin,K. (2001). "**Quantitative Methods for Business**, Eleventh Edition, South-Western Colloge Publishing.

– Anderson,D.R.,Sweeney,D,J.and illiams,T.A.(1979).**Management Science : Quantitative Approaches to Decision Making,**USA : West Publishing Co.

– Bonini,C.P.,Hausmon,W.H.,andBierman,H.(1997). " **Quantitative Analysis for Management**,Ninth Edition, London: IRWIN.

– Gass,S.(1975).**Linear Programming**,4th ed, New York: McGraw – Hill.

– Hiller,F.S., and liberman,G.J. (1980**). Introduction to Management Science**,California : Holden Day,Inc.

– Hiller,F.S., and liberman,G.J.(2005). **Introduction to Operations Research**, Eighth Edition, New York : McGraw – Hill Companies Inc.

– Render,B., and Stair,M.(1991). **Quantitative Analysis for Management**, Boston : Allyn and Bacon.

– Render,B., and Stair,M.(1992). **Introduction to Management Science**, Boston : Allyn and Bacon.

– Stevenson ,W.J.(2002). " **Operations Management**" 7th.ed, McGraw-HILL, Irwin.





www.comm.alexu.edu.eg E-mail: comr-dean@alexu.edu.eg
كلية التجارة - مجمع العلوم الإنسانية والإجتماعية - سوتير الشاطبى - الأسكندرية
Faculty of Commerce -Human & Social Sciences Complex - Soter - Alex.
Tel & Fax: 203-4865655 Postal: 21526

2019